

Tartu Ülikool  
Loodus- ja täppiseaduste valdkond  
Matemaatika ja statistika instituut

Herman Aadamsoo

**Tõenäosusjaotuste asümptootilise kvantimisteeoria  
kasutamine praktikas**

Bakalaureusetöö (9 EAP)

Juhendaja: prof. Kalev Pärna

Tartu 2018

## Tõenäosusjaotuste asümptootilise kvantimistooria kasutamine praktikas

Bakalaureusetöö

Herman Aadamsoo

**Lühikokkuvõte:** Antud töö eesmärgiks on uurida lihtsaid alternatiivseid meetodeid tõenäosusjaotuste kvantimiseks. Alternatiivsed meetodid põhinevad asümptootilisest kvantimistooriast pärit tulemusel, mille kohaselt juhusliku suuruse  $X$  korral, mille tihedusfunktsiooniks on  $f(x)$ , on optimaalsete kvantimispunktide jaotus tihedusfunktsiooniga  $f^*(x) = c \cdot f^{\frac{1}{3}}(x)$ , kus  $c$  on normeerimistegur. Et hinnata alternatiivsete meetodite headust võrreldakse nende abil saadud tulemusi optimaalsete kvantimispunktidega, mis leitakse Lloyd-Max'i algoritmi abil. Lisaks hinnatakse, kas alternatiivsetel meetoditel leitud kvantimispunktid sobivad Lloyd-Max'i algoritmi algühenditeks, et algoritmi tööd kiirendada. Uuritud on normaaljaotust, ühtlast jaotust, eksponentjaotust, hii-ruut jaotust ning gamma-jaotust.

**CERCS teaduseriala:** P160 Statistika, operatsioonianalüüs, programmeerimine, finants- ja kindlustusmatemaatika

**Märksõnad:** tõenäosusjaotused, lähendamine, kodeerimistooria, asümptootiline jaotus, numbriline integreerimine

## Asymptotically optimal quantization of probability distributions

Bachelor thesis

Herman Aadamsoo

**Abstract:** Given study is focused on exploring simple alternative methods for quantizing probability distributions. All alternative methods are based on a result from asymptotic quantization theory, which states that for a given random variable  $X$  with a probability density function  $f(x)$ , locations of optimal quantization points conform to the density  $f^*(x) = c \cdot f^{\frac{1}{3}}(x)$ , where  $c$  is normalizing constant. For estimating the goodness of alternative methods, their results are compared to exact results, obtained by Lloyd-Max algorithm. In addition, the author has observed whether the results of alternative methods can be used as initial inputs for Lloyd-Max algorithm in order to quicken

the convergence of the algorithm. The study examines normal distribution, uniform distribution, exponential distribution, chi-squared distribution and gamma distribution.

**CERCS research specialisation:** P160 Statistics, operations research, programming, actuarial mathematics

**Keywords:** probability distributions, approximation, coding theory, asymptotic distribution, numerical integration

# Sisukord

<b>1</b>	<b>Sissejuhatus</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Metoodika</b>	<b>5</b>
2.1	Tõenäosusjaotuse kvantimine . . . . .	5
2.2	Kvantimisel tekkinud vea hindamine . . . . .	6
2.3	Tõenäosusjaotuse tinglik keskväärtaus . . . . .	6
2.4	Tõenäosusjaotuse kvantiilid . . . . .	7
2.5	Asümptootiline kvantimisteooria . . . . .	7
2.6	Kvantimismeetodid . . . . .	9
2.6.1	Lloyd-Max'i algoritm . . . . .	9
2.6.2	Alternatiivne meetod 1 (M1) . . . . .	10
2.6.3	Alternatiivne meetod 2 (M2) . . . . .	10
2.6.4	Alternatiivne meetod 3 (M3) . . . . .	11
2.6.5	Alternatiivne meetod 4 (M4) . . . . .	11
<b>3</b>	<b>Tulemused</b>	<b>12</b>
3.1	Kvantijad . . . . .	12
3.1.1	Standardne normaaljaotus . . . . .	12
3.1.2	Ühtlane jaotus . . . . .	14
3.1.3	Eksponentjaotus . . . . .	16
3.1.4	Hii-ruut jaotus . . . . .	20
3.1.5	Gamma-jaotus . . . . .	22
3.2	Alternatiivsete kvantijate kasutamine Lloyd-Max'i algoritmi alglähenditena	25
<b>4</b>	<b>Kokkuvõte</b>	<b>28</b>
	<b>Kasutatud kirjandus</b>	<b>29</b>
	<b>Lisad</b>	<b>30</b>

# 1 Sissejuhatus

Kvantimise mõiste pärineb signaalitööstlusest, kus pidevaid signaale on vaja teisendada digitaalsele ehk diskreetsele kujule. Kvantimise käigus saadakse pidevast ehk analoogsignaalist digitaalne signaal, millel on  $k$  erinevat väärtust ja mida on võimalik digitaalsete elektroonikaseadmetega käidelda. Matemaatikas tegeleb kvantimine pidevatele funktsioonidele optimaalsete diskreetsete lähendite leidmisega. Optimaalsete lähendite leidmine aitab kaasa informatsiooni vähendamisele. [1, lk.4-5,291]

Kvantimise algusaastatel tegeleti valdavalt ühedimensionaalsete juhtudega. Steinhaus oli esimene, kes tegeles kolmemõõtmelise juhuga [7]. Praeguseks on tõenäosusjaotuste kvantimine leidnud rakendust erinevates valdkondades. Näiteks Gilles Pagés on uurinud kvantimise kasutamist numbrilises integreerimises (1997) ja Bolobas kasutas seda, et töötada välja meetodikat teeninduspunktide optimaalseks paigutuseks (1972, 1973) [3, sissejuhatus].

Antud töö eesmärgiks on pakkuda välja alternatiivseid meetodeid pidevate ühemõõtmeliste tõenäosusjaotuste ligikaudseks kvantimiseks, mis põhinevad ühel asümptotilisel tulemusel optimaalse kvantija punktide paiknemise kohta. Alternatiivsete meetodite headuse hindamiseks võrreldakse nende poolt leitud kvantijaid optimaalsete kvantijatega, mis leitakse Lloyd-Max'i algoritmi abil. Lloyd-Max'i algoritm leiab optimaalseid kvantimispunkte iteratiivsel teel ja tarbib seetõttu palju arvutusressurssi ning vajab häid alglähendeid [2]. Alternatiivsete meetodite väljatöötamise ajendiks on lootus leida meetodeid, mis ei anna optimaalsest kvantijast oluliselt halvemaid tulemusi, kuid vajavad seejuures palju vähem arvutusressursse.

Veendumaks, et töö käigus leitud tulemused on korrektsed, on Lloyd-Max'i algoritmi abil leitud tulemusi võrreldud Grafi ja Luschgy raamatus [3, lk.71-73] leiduvate tulemustega (ainult  $k = 8$  korral). Standardse normaaljaotuse korral leitud tulemusi on võrreldud Pariisi VI ülikooli arvutusliku tõenäosusteooria labori veebilehel [4] avaldatud tulemustega ( $k = 8$ ,  $k = 20$  ja  $k = 100$ ). Meie poolt saadud tulemused ühtivad mõlemas allikas toodud tulemustega.

## 2 Metoodika

### 2.1 Tõenäosusjaotuse kvantimine

Paljud tõenäosusjaotused on pidevad, aga praktikas esineb rakendusvaldkondi, kus on vaja pidevaid tõenäosusjaotusi diskreetsel kujul esitada. Üks vanimaid ja võib-olla ka lugejale kõige tuttavamaid tõenäosusjaotuste kvantimise kasutusalasid on tõenäosusjaotuse esitamine histogrammina. Selle asemel, et esitada jaotuse tihedusfunktsioon pideva funktsioonina, kujutatakse graafikul tulpasid, mille kõrgus näitab tulba poolt määratud piirkonda langemise tõenäosust. Tõenäosusjaotuse kvantijaks nimetame funktsiooni  $q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , mille tulemusena saadakse juhuslikust suurusest  $X$  kvanditud versioon  $q(X)$ , mille väärtuste hulk on lõplik [3, lk.30].

Kvantimise protsessi käigus esineb informatsioonikadu, sest algse pideva jaotuse asemel on  $k$  erinevat punkti, mis esindavad juhusliku suuruse väärtusi. Informatsioonikadu on võimalik mõõta sihifunktsiooniga, milleks on  $W(q(X)) = E|X - q(X)|^2$ . Et kvantimise käigus tekkinud informatsioonikadu oleks võimalikult väike, soovime leida optimaalse kvantija  $q^*(X)$ , mille korral  $W(q^*(X)) = \min_{q(X) \in Q(X)} W(q(X))$ , kus  $Q(X)$  on kõikvõimalike kvantijate hulk.

Tähistame mingi punktide hulga  $A = \{a_1, \dots, a_k\}$  ja juhusliku suuruse  $X$  tihedusfunktsiooni  $f(x)$ . Punkti  $a_i \in A$  poolt tekitatud Voronoi regioon on defineeritud valemiga

$$W(a_i|A) = \{x \in \mathbb{R} : \|x - a_i\| = \min_{b \in A} \|x - b\|\},$$

kus  $\|\cdot\|$  tähistab mingit normi. Voronoi tükelduseks nimetame hulga  $A$  kõikide Voronoi regioonide hulka  $\{W(a_i|A) : a_i \in A\}$ . Voronoi tükeldust tuntakse ka “vähima kauguse tükelduse” nime all. [3, lk. 7-8]

Reaalteljel on mingitele tinglikele keskväärtustele  $A$  vastava Voronoi tükelduse leidmiseks vaja arvutada tükelduspunktid eeskirja

$$C = \{c_0, \frac{a_2 + a_1}{2}, \dots, \frac{a_k + a_{k-1}}{2}, c_k\} =: \{c_0, c_1, \dots, c_k\}$$

järgi, kusjuures  $c_0$  on jaotuse tihedusfunktsiooni määramispiirkonna vähim võimalik väärtus ning  $c_k$  on jaotuse tihedusfunktsiooni määramispiirkonna suurim võimalik väärtus.

Leitud tükelduspunktide põhjal saab vastava Voronoi tükelduse kirjutada järgnevalt:

$$S = \{(c_0, c_1], (c_1, c_2], \dots, (c_{k-2}, c_{k-1}], (c_{k-1}, c_k)\} = \{S_1, \dots, S_k\}$$

Etteantud punktihulgale  $A = \{a_1, \dots, a_k\}$  vastava Voronoi tükelduse leidmine on oluline element optimaalse kvantija leidmise iteratiivses protsessis.

## 2.2 Kvantimisel tekkinud vea hindamine

Pideva signaali kvantimisega kaasneb alati viga. Et hinnata tekkinud viga, on vaja mõõdikut, mis sobiks iga tõenäosusjaotuse jaoks. Üheks selliseks mõõdikuks on ruutkeskmine viga ehk  $MSE$ . Funktsiooni  $X$  ja selle lähendi  $q(X)$  korral tähistame ruutkeskmise vea järgnevalt:

$$MSE = E||X - q(X)||^2 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)(x - q(x))^2 dx$$

[2]. Tasub ära märkida, et ruutkeskmine viga on üldistus dispersioonist. Nimelt valides  $k = 1$  korral kvantijaks  $q(X) = EX$ , saame  $MSE = E||X - q(X)||^2 = E||X - EX||^2 = DX$ .

Punktide komplekti  $A = \{a_1, \dots, a_k\}$  korral tähistame tekkiva ruutkeskmise vea

$$W(A) := \sum_{i=1}^k \int_{S_i} (x - a_i)^2 \cdot f(x) dx.$$

Edaspidi on nimetatud eelmainitud veafunktsiooni ka sihifunktsiooniks.

## 2.3 Tõenäosusjaotuse tinglik keskväärus

Pideva juhusliku suuruse  $X$  keskvääruseks nimetatakse suurust

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx,$$

eeldusel, et  $\int_{-\infty}^{\infty} |x| \cdot f(x) dx < \infty$ , kus  $f(x)$  on vastava jaotuse tihedusfunktsioon. Jaotuse keskväärus on antud jaotuse massikese reaalteljel ning on kõige laialdasemalt kasutatud

versioon jaotuse “keskmisest” väärtusest.[5, lk.65]

Juhusliku suuruse  $X$  tingliku keskvaartuse intervallis  $S_i = (c_i, c_{i+1})$  tähistame  $E(X|S_i)$ . Teades  $X$  tihedusfunktsiooni  $f(x)$  arvutatakse tinglik keskvaartus järgnevalt:

$$E(X|S_i) = \frac{\int_{S_i} x \cdot f(x) dx}{\int_{S_i} f(x) dx}$$

Intervalli  $S_i$  tinglik keskvaartus  $E(X|S_i)$  minimiseerib ruuthälbe selles intervallis ehk kehtib  $\int_{S_i} (E(X|S_i) - x)^2 \cdot f(x) dx = \min_{\alpha \in S_i} \int_{S_i} (\alpha - x)^2 f(x) dx$ . Kui lõiguks on terve reaaltelg ( $S_i = (-\infty, \infty)$ ), siis  $E(X|S_i) = EX$  ehk  $E(X|S_i)$  on jaotuse keskvaartuseks. [5, lk.70]

## 2.4 Tõenäosusjaotuse kvantiilid

Juhuslike suuruste jaotuste iseloomustamiseks on kasutusel  $p$ -kvantiilid, kus  $p \in (0, 1)$ . Pideva juhusliku suuruse  $X$   $p$ -kvantiiliks nimetatakse arvu  $q_p$ , mille korral kehtib võrratus

$$F(q_p) = P(X < q_p) = p,$$

kus  $F(x)$  on juhusliku suuruse  $X$  jaotusfunktsioon. [8, lk.46]

Mingi naturaalarvu  $n$  korral jaotavad  $(\frac{1}{n})$ -kvantiilid tõenäosusjaotuse  $F$   $n$  osaks nii, et kõikide osade tõenäosused on võrdsed. See tähendab, et kui tekitame tõenäosusjaotusele  $F$  tükelduse  $S = \{S_1, \dots, S_n\} = \{(q_0, q_{\frac{1}{n}}], \dots, [q_{\frac{n-1}{n}}, q_1)\}$ , siis  $P(X \in S_i) = \frac{1}{n}, i = 1, \dots, n$ . Seda omadust kasutatakse ära järgmises alampeatükis lahti seletatud niinimetatud alternatiivsete meetodite puhul. Töö käigus selgub, et tõenäosusjaotuste võrdseteks osadeks jagamine kvantiilide abil osutub oluliseks osaks leidmaks lihtsaid alternatiivseid meetodeid tõenäosusjaotuste kvantimiseks.

## 2.5 Asümptootiline kvantimisteooria

Kõigi nelja alternatiivse meetodi puhul on läbivaks jooneks see, et esmalt leitakse juhusliku suuruse  $X$  puhul jaotus  $f^*$ , mille leidmiseks tõstetakse algse jaotuse tihedus-



funktsioon astmesse  $\frac{1}{3}$ . Tähistame leitud jaotuse tihedusfunktsiooni

$$f^*(x) := c \cdot f^{\frac{1}{3}}(x),$$

kus  $f(x)$  on algse jaotuse tihedusfunktsioon ning  $c$  on normeerimistegur, mille tulemusena  $\int_{-\infty}^{\infty} f^*(x) = 1$ . Eelneva võrduse kehtimine on oluline, sest on eelduseks, et funktsioon oleks tihedusfunktsioon.

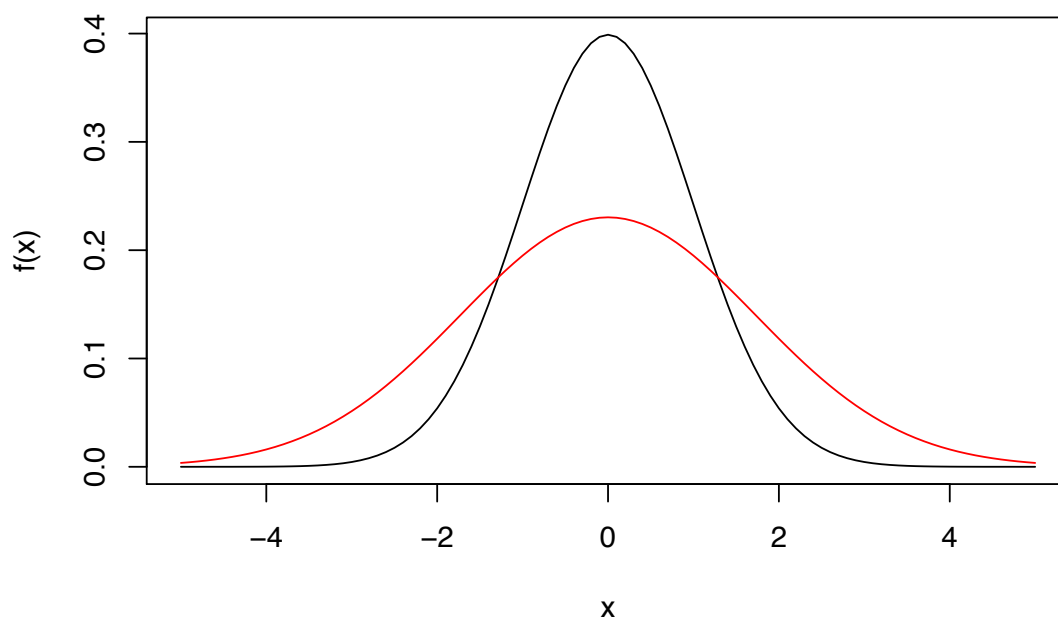
Jaotuse  $f^*$  valik ei ole juhuslik ega katsetuslik, vaid erinevad autorid on ära tõestanud, et optimaalsete kvantimispunktide korral on kvantimispunktide paiknemise jaotuseks  $f^*$ . Antud tulemuse saab formuleerida järgnevalt:

Olgu  $k \in \mathbb{N}$  suur. Olgu  $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}$  optimaalne kvantija  $k$  korral, millega on lähendatud juhuslikku suurust  $X$ . Kui  $k \rightarrow \infty$ , siis iga intervalli  $D \subset \mathbb{R}$  korral

$$\frac{\#\{a_i : a_i \in D\}}{k} \rightarrow c \cdot \int_D f^{\frac{1}{3}}(x) dx,$$

kus  $c = \left[ \int_{\mathbb{R}} f^{\frac{1}{3}}(x) dx \right]^{-1}$  on normeerimistegur, tänu millele  $c \cdot \int_{\mathbb{R}} f^{\frac{1}{3}}(x) dx = 1$ . Seega punktide  $a_1, \dots, a_k$  paiknemine reaalteljel on jaotusega  $c \cdot f^{\frac{1}{3}}(x)$ , kui  $k$  on suur. [6]

Et eelnevat illustreerida, on joonisel 1 välja toodud joonis standardsest normaaljaotusest ja selle asümptootiliselt optimaalsete kvantimispunktide jaotusest  $N(0, \sqrt{3})$ . On näha, et algse tihedusfunktsiooni tõstmine astemsse  $\frac{1}{3}$  “silub” tihedusfunktsiooni. Suurema tihedusega piirkondades tihedus väheneb ja hõredama tihedusega piirkondades tihedus kasvab. Kõik antud töös vaadeldavad alternatiivsed meetodid põhinevad jaotuse  $f^*$  kvantiilide  $q_\alpha$  leidmisel, kus  $\alpha$  väärtused võetakse teatud mõttes ühtlase sammuga. Sel moel saavutatakse kvantimispunktide paiknemise kooskõla jaotusega  $f^*$ .



Joonis 1: Standardse normaaljaotuse  $N(0,1)$  ja selle asümptootiliselt optimaalsete kvantimispunktide jaotuse  $N(0, \sqrt{3})$  tihedusfunktsioonid

## 2.6 Kvantimismeetodid

Järgnevas esitame antud töös uuritud kvantimismeetodeid. Neist esimene (Lloyd-Max'i iteratiivne meetod) on ammu tuntud ja viib täpse tulemuseni, kuid samas kasutab palju arvutusressurssi ja on seega aeganõudev. Ülejäänud meetodid M1, M2, M3 ja M4 on seevastu odavad ja kiired ning põhinevad asümptootilisel teorial.

### 2.6.1 Lloyd-Max'i algoritm

Et uurida, kui head on alternatiivsed meetodid tõenäosusjaotuste kvantimiseks peab esmalt leidma jaotustele optimaalsed tükeldused. Jaotusele optimaalse kvantija  $\{a_1, \dots, a_k\}$  leidmiseks on sobiv Lloyd-Max'i algoritm. Antud algoritm töötati välja S. P. Lloydi poolt 1957. aastal, kuid publitseeriti alles 25 aastat hiljem. Sama tulemuseni jõudis ka J. Max 1960. aastal, kes publitseeris tulemuse koheselt. [2]

Tähistame soovitava arvu tinglike keskväärtusi tähisega  $k$  ja juhusliku suuruse  $X$  tihedusfunktsiooni  $f(x)$ . Lloyd-Max'i algoritm on järgmine:

1. Valime alglähendi  $A^0 = \{a_1, \dots, a_k\} \in \mathbb{R}$
2. Iga  $i, 1 \leq i \leq k-1$  korral määrame lõikepunkti  $c_i = \frac{a_i + a_{i+1}}{2}$
3. Iga  $i, 1 \leq i \leq k-1$  korral määrame uueks  $a_i$  väärtuseks  $X$  tingliku keskvaartuse intervallis  $(c_{i-1}, c_1)$ , kusjuures  $c_0 = -\infty$  ja  $c_k = \infty$
4. Kordame samme 2 ja 3 kuni koondumistingimus on täidetud

Algoritmi töö käigus sihifunktsiooni väärtus kahaneb monotoonselt iga sammu 2 ja 3 täitmisel. Kuna samal ajal sihifunktsioon on alati mittenegatiivne, siis eksisteerib tal mingi piirväärtus. Töös on algoritmi koondumistingumuseks valitud

$$\max_{i \in \{1, \dots, k\}} \{a_i^{(n-1)}, a_i^{(n)}\} \leq 10^{-8},$$

kus  $a_i^{(n)}$  on  $n$ -ndal iteratsioonil saadud tingliku keskmise lähend.

Tulenevalt koonduvustingimusest on arvutustulemused ümardatud kaheksa komakohani, et erinevatel meetoditel saadud tulemused oleksid võrreldavad.

Alljärgnevate meetodite M1, ..., M4 abil saadud kvantijaid  $A^0 = \{a_1^0, \dots, a_k^0\}$  võib edukalt kasutada Lloyd-Max'i iteratiivse meetodi alglähendina.

### 2.6.2 Alternatiivne meetod 1 (M1)

Esimeseks alternatiivseks meetodiks on uue jaotuse  $f^* = c \cdot f^{\frac{1}{3}}$  jaoks  $(\frac{1}{k+1})$ -kvantiilide leidmine. Algse jaotuse  $f$  tinglike keskvaartuste alglähenditeks võetakse kvantiilid  $q_{\frac{1}{k+1}}, \dots, q_{\frac{k}{k+1}}$  ehk

$$a_1^0 = q_{\frac{1}{k+1}}, \dots, a_k^0 = q_{\frac{k}{k+1}}.$$

### 2.6.3 Alternatiivne meetod 2 (M2)

Teiseks alternatiivseks meetodiks on jaotuse  $f^*$   $(\frac{1}{k})$ -kvantiilide kasutamine. Täpsemalt, jaotuse  $f^*$   $(\frac{1}{k})$ -kvantiilid  $\{q_{\frac{1}{k}}, \dots, q_{\frac{k-1}{k}}\}$  võetakse tükelduse lõikepunktideks  $c_1 = q_{\frac{1}{k}}, \dots, c_{k-1} = q_{\frac{k-1}{k}}$  lisades neile  $f^*(x)$  määramispiirkonna vähim väärtus  $c_0$  ja suurim väärtus  $c_k$ . Selle tulemusena saadakse tükeldus  $S = \{(c_0, c_1), \dots, (c_{k-1}, c_k)\} = \{S_1, \dots, S_k\}$ .

Algselle jaotusele  $f$  vastavate tinglike keskvaartuste komplekt  $A$  saadakse igas tükelduse

lõigus tingliku keskvaartuse

$$a_i = E(X^*|s_i) = \frac{\int_{s_i} x \cdot f^*(x)}{\int_{s_i} f^*(x)}, i \in 1, \dots, k$$

leidmise teel.

#### 2.6.4 Alternatiivne meetod 3 (M3)

Ka kolmanda meetodi puhul on kasutusel jaotuse  $f^*$  kvantiilid. Seekord leitakse uue jaotuse  $(2k)$ -kvantiilid, jättes iga teine vahele. Seega saadakse kvantijaks

$$a_1^0 = q_{\frac{1}{2k}}, a_2^0 = q_{\frac{3}{2k}}, \dots, a_{k-1}^0 = q_{\frac{2k-3}{2k}}, a_k^0 = q_{\frac{2k-1}{2k}}.$$

#### 2.6.5 Alternatiivne meetod 4 (M4)

Neljas alternatiivne meetod on mõeldud peamiselt mittesümmeetriliste jaotuste jaoks ja seega leitakse uuele jaotusele  $f^*$  kvantiile mittesümmeetrilise paigutusega. Esimeseks kvantiiliks võetakse  $q_{\frac{1}{2k}}$  ning viimaseks kvantiiliks  $q_{\frac{k}{k+1}}$ . Esimese ja teise kvantiili vahele jäävad kvantiilid (mida on  $k-2$  tükki) paigutatakse “võrdsete vahedega”.

Täpsemalt, juhusliku suuruse  $X$   $k$  tingliku keskvaartuse lähendid leitakse järgnevalt:

$$a_i^0 = q_{\frac{1}{2k} + h_i},$$

kus  $h_i = (i-1) \cdot \frac{\frac{k}{k+1} - \frac{1}{2k}}{k-1}$ ,  $i \in \{1, \dots, k\}$  on tõenäosuse samm.

## 3 Tulemused

Antud peatükis on esitatud viie klassikalise jaotuse optimaalsed kvantijad, mis on saadud Lloyd-Max'i meetodiga, ja ligikaudsed kvantijad, mis on saadud lihtsate alternatiivsete meetoditega. Peatüki lõpus demonstreeritakse ligikaudsete kvantijate kasutamist Lloyd-Max'i iteratiivse meetodi alglähendina.

### 3.1 Kvantijad

#### 3.1.1 Standardne normaaljaotus

Esimesena on uuritud standardset normaaljaotust, kvantides seda  $k = 8$ ,  $k = 20$  ja  $k = 100$  punkti abil. Alternatiivsete meetodite puhul on uue tihedusfunktsiooni  $f^*(x)$  leidmine järgmine:

$$f^*(x) = c \cdot f^{\frac{1}{3}}(x) = c \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{c}{\sqrt[6]{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{6}},$$

kus

$$c = \frac{1}{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{x^2}{6}}}{\sqrt[6]{2\pi}}}$$

puhul on tegu normeerimisteguriga, mis tagab eelduse  $\int_{-\infty}^{\infty} f^*(x) = 1$  täitmise.

Selgitanud välja uue jaotuse tihedusfunktsiooni  $f^*(x) = \frac{c}{\sqrt[6]{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{6}}$ , näeme, et tegemist on normaaljaotusega  $N(0, \sqrt{3})$ . Järgnevalt leitakse kvantijad, tehes seda esmalt Lloyd-Max'i iteratiivsel meetodil ning seejärel neljal alternatiivsel meetodil.

Tabel 1: Tulemused k=8 korral

Täpne	M1	M2	M3	M4
-2.1519457	-2.1142111	-2.852390	-2.6571747	-2.6571747
-1.3439092	-1.3245160	-1.550851	-1.5365829	-1.5817953
-0.7560052	-0.7460416	-0.851042	-0.8465856	-0.9152144
-0.2450941	-0.2419853	-0.273623	-0.2724701	-0.3644727
0.2450942	0.2419853	0.273623	0.2724701	0.1509411
0.7560053	0.7460416	0.851042	0.8465856	0.6804029
1.3439093	1.3245160	1.550851	1.5365829	1.2844786
2.1519457	2.1142111	2.852390	2.6571747	2.1142111

Siinkohal on välja toodud tulemuste tabel  $k = 8$  korral, tabelid  $k = 20$  ja  $k = 100$  kohta asuvad lisades. Vaadates tabelit 1, paistab parima tulemuse olevat andnud M1. Meetodid M2 ja M3 puhul on näha, et jaotuse sabade pool hakkavad tulemused optimaalsetest kvantijatest eemale nihkuma. Jaotuse keskel, kus tihedus on suurim ei paista erinevused olevat nii suured.

Tabelis 2 on välja toodud kõikide meetodite sihifunktsioonide väärtused ehk  $MSE = E|X - q(X)|^2$ , kus  $q(X)$  on punktile  $X$  lähim keskmine. Nagu eelmise tabelist puhul eeldada võis, andis kõige väiksema veaga tulemuse meetod M1, mille puhul sihifunktsiooni väärtus erines Lloyd-Max'i meetodi sihifunktsiooni väärtusest vaid 0.13%. Kõige halvema tulemuse andis meetod M2.

Tabel 2: Meetodite vead  $k = 8$  korral

	Täpne	<b>M1</b>	M2	M3	M4
MSE	0.03454775	<b>0.03459208</b>	0.0421762	0.03919026	0.03654249

Tabelis 3 on näha meetodite sihifunktsioonide väärtusi  $k = 20$  korral. Tasub tähele panna, et iga meetodi puhul on sihifunktsioonide väärtused vähenenud, mis tähendab, et kvantimisel tekkinud viga on väiksem tulenevalt suuremast lähendite arvust. Meetodite järjestus sihifunktsiooni alusel on jäänud samaks. Parim on meetod M1, mille korral on sihifunktsiooni väärtuseks ligikaudu 0.006, mis erineb Lloyd-Max'i meetodist vaid 0.02% võrra. Lisaks sihifunktsioonide väärtuste vähenemisele on vähenenud iga alternatiivse meetodi korral ka suhtelised erinevused optimaalsest kvantijast. Selline käitumine annab alust arvata, et suure  $k$  väärtuse korral võivad alternatiivsete meetodite sihifunktsioonide väärtused koonduda optimaalse kvantija sihifunktsiooni väärtuseks ehk optimaalse tükelduse puhul saadavaks kvantimisveaks.

Tabel 3: Meetodite vead  $k = 20$  korral

	Täpne	<b>M1</b>	M2	M3	M4
MSE	0.00620779	<b>0.0062088</b>	0.00677046	0.00657122	0.00637897

Viimasena on standardse normaaljaotuse puhul vaadeldud juhtu  $k = 100$ . Vaadates sihifunktsioonide väärtusi ja alternatiivsete meetodite erinevusi Lloyd-Max'i meetodist tabelis 4, on näha, et meetodi M1 tulemus on sama hea kui Lloyd-Max'i meetodi tulemus.

Seega on teada, et standardse normaaljaotuse korral saavutab meetod M1 alates mingist lähendi suurusest sama hea tulemuse kui optimaalne kvantija. Üpriski hea tulemuse annab ka meetod M4, mille korral sihifunktsiooni väärtus erineb optimaalse kvantija omast 0.62% võrra. Samas on raske öelda, kas antud meetod saab anda sisuliselt sama häid tulemusi, sest leitud lähendite  $a_1^*, \dots, a_k^*$  paigutus on ebasümmeetriline.

Tabel 4: Meetodite vead  $k = 100$  korral

	Täpne	M1	M2	M3	M4
MSE	0.00026671	<b>0.00026671</b>	0.00027175	0.00027008	0.00026837

### 3.1.2 Ühtlane jaotus

Järgnevalt on uuritud ühtlase jaotuse  $U(-1, 1)$  lähendamist  $k = 8$ ,  $k = 20$  ja  $k = 100$  punktiga. Alternatiivsete meetodite puhul on tihedusfunktsiooni  $f^*(x)$  leidmine järgmine:

$$f^*(x) = c \cdot f^{\frac{1}{3}}(x) = c \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{c}{\sqrt[3]{2}} = \frac{1}{2},$$

kus

$$c = \frac{1}{\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt[3]{2}}} = \frac{1}{2 \frac{1}{\sqrt[3]{2}}}$$

puhul on tegu normeerimisteguriga, mis täidab eelduse  $\int_{-1}^1 f^*(x) = 1$ .

Leitud tihedusfunktsiooni põhjal on ka jaotus  $f^*$  jaotusega  $U(-1, 1)$  ehk tegu on esialgse jaotusega.

Tabel 5: Tulemused  $k=8$  korral

Täpne	M1	M2	M3	M4
-0.875	-0.7777778	-0.875	-0.875	-0.87500000
-0.625	-0.5555556	-0.625	-0.625	-0.63888889
-0.375	-0.3333333	-0.375	-0.375	-0.40277778
-0.125	-0.1111111	-0.125	-0.125	-0.16666667
0.125	0.1111111	0.125	0.125	0.06944444
0.375	0.3333333	0.375	0.375	0.30555556
0.625	0.5555556	0.625	0.625	0.54166667
0.875	0.7777778	0.875	0.875	0.77777778

Vaadates meetodite tulemusi  $k = 8$  korral tabelist 5 on näha, et meetodid M2 ja M3 annavad täpselt sama tulemuse kui Lloyd-Max'i algoritm. Meetodid M1 ja M4 annavad teistest erinevaid tulemusi ja seega on nende puhul kvantimisel tekkiv viga suurem.

Tabel 6: Meetodite vead  $k = 8$  korral

	Täpne	<b>M1</b>	<b>M2</b>	M3	M4
MSE	0.00522146	<b>0.00685871</b>	<b>0.00522146</b>	0.00522146	0.00595035

Nagu tabeli 5 pealt võis arvata, on näha, et  $k = 8$  korral on sihifunktsioonide väärtused meetodite M2 ja M3 puhul samad, mis Lloyd-Max'i algoritmi korral. Meetodi M1 sihifunktsiooni väärtus erineb optimaalse kvantija sihifunktsiooni väärtusest peaaegu kolmandiku võrra. Meetod M4 jääb optimaalse tulemuse ja meetodil M1 leitud tulemuse vahele.

Tabel 7: Meetodite vead  $k = 20$  korral

	Täpne	<b>M1</b>	<b>M2</b>	M3	M4
MSE	0.00080645	<b>0.00097182</b>	<b>0.00080645</b>	0.00080645	0.00089179

Tabelist 7 uut informatsiooni juurde ei saa. Kõikide meetodite puhul on sihifunktsioonide väärtused kahanenud. Meetodite paremusjärjestus sihifunktsiooni väärtuse alusel on jäänud samaks.

Tabel 8: Meetodite vead  $k = 100$  korral

	Täpne	M1	M2	M3	M4
MSE	0.00003316	0.0000322	0.00003316	0.00003316	0.00003267

Vaadates erinevatel meetoditel kvanditud jaotust  $U(-1, 1)$   $k = 100$  korral tabelist 8, on näha, et parima tulemuse annab meetod M1, mis  $k = 8$  ja  $k = 20$  korral andis halvemaid tulemusi. Samuti annab meetod M4 optimaalsest kvantijast parema tulemuse. Selline tulemus on põhjustatud numbrilise integreerimisel tekkivast veast sihifunktsiooni arvutamise käigus. Samas näitavad saadud tulemused, et ühtlase jaotuse puhul võivad kõik meetodid suure  $k$  väärtuse korral anda optimaalsele tulemusele lähedaseid tulemusi.



### 3.1.3 Eksponentjaotus

Uuritud on eksponentjaotusi  $Exp(1)$  ja  $Exp(\frac{1}{4})$ , mõlemal  $k = 8$ ,  $k = 20$  ja  $k = 100$  puhul. Tähistame eksponentjaotuse  $Exp(\lambda)$  ning jaotuse tihedusfunktsiooni  $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ . Alternatiivsete meetodite puhul on uue tihedusfunktsiooni  $f^*(x)$  leidmine järgnev:

$$f^*(x) = c \cdot f^{\frac{1}{3}}(x) = c \cdot (\lambda e^{-\lambda x})^{\frac{1}{3}} = c \cdot \lambda^{\frac{1}{3}} e^{-\frac{\lambda x}{3}},$$

kus

$$c = \frac{1}{\int_0^\infty \lambda^{\frac{1}{3}} e^{-\frac{\lambda x}{3}}}$$

puhul on tegu normeerimisteguriga, mis täidab eeldust  $\int_0^\infty f^*(x) = 1$ .

Tasub ära mainida, et eksponentjaotus on gammajaotuse alamjaotus. Täpsemalt  $Exp(\frac{1}{k}) \sim \Gamma(1, k)$  (gammajaotuse tähistus ja tihedusfunktsioon on välja toodud ülejäärmises alampeatükis). See tähendab, et järgnevalt uuritud jaotuste puhul  $Exp(1) \sim \Gamma(1, 1)$  ja  $Exp(\frac{1}{4}) \sim \Gamma(1, 4)$ .

#### 3.1.3.1 Exp(1)

Jaotuse  $Exp(1)$  puhul saame alternatiivsete meetodite jaoks vajalikuks tihedusfunktsiooniks  $f^*(x) = c \cdot e^{-\frac{x}{3}}$ , kus  $c = \int_0^\infty \frac{1}{e^{-\frac{x}{3}}}$ , mille põhjal saab öelda, et jaotuseks on  $Exp(\frac{1}{3})$ . Järgnevalt leitakse kvantijad esmalt Lloyd-Max'i meetodil ning seejärel kolmel alternatiivsel meetodil.

Uurides tabelis 9 erinevate meetodite poolt  $k = 8$  korral saadud tulemusi korral, on näha, et kõigi alternatiivsete meetoditega saadud väärtused on rohkem jaotuse saba poole kaldus kui Lloyd-Max'i meetodi omad. Kõige rohkem on optimaalsete kvantijate suhtes nihkes meetod M1. Meetodid M2 ja M3 annavad võrdlemisi sarnaseid tulemusi, aga M3 tulemused tunduvad olevad täpsemad. Meetod M4 paistab andvat mõlemas otsas üsnagi täpseid tulemusi.

Tabel 9: Tulemused  $k=8$  korral

Täpne	M1	M2	M3	M4
0.1753427	0.3533491	0.1958408	0.1936156	0.1936156
0.5725291	0.7539433	0.6258819	0.6229181	0.5973860
1.0304672	1.2163953	1.1282229	1.1240804	1.0640783
1.5711687	1.7633600	1.7322883	1.7260924	1.6169895
2.2313262	2.4327906	2.4903029	2.4800357	2.2953620
3.0792333	3.2958369	3.5096971	3.4894524	3.1733709
4.2664818	4.5122322	5.0794415	5.0219293	4.4199172
6.2664818	6.5916737	9.2383246	8.3177662	6.5916737

Vaadates tabelit 10, kus on välja toodud sihifunktsioonide väärtused  $k = 8$  korral, on näha, et M4 annab alternatiivsetest meetoditest parima tulemuse. Kõige kehvema tulemuse annab meetod M1, mille puhul sihifunktsiooni väärtus on ligikaudu 23% suurem kui Lloyd-Max'i meetodi puhul.

Tabel 10: Meetodite vead  $k = 8$  korral

	Täpne	M1	M2	M3	<b>M4</b>
MSE	0.03075195	0.03780946	0.03503796	0.0334593	<b>0.03096949</b>

Tabeli 11 puhul, kus on välja toodud tulemused  $k = 20$  korral, midagi üllatavat ei leidu. Kõikide meetodite puhul on sihifunktsiooni väärtus väiksem kui  $k = 8$  puhul ning meetodite paremusjärjestus sihifunktsiooni alusel on sama.

Tabel 11: Meetodite vead  $k = 20$  korral

	Täpne	M1	M2	M3	<b>M4</b>
MSE	0.0053232	0.00583233	0.00561761	0.00552159	<b>0.00531003</b>

Viimasena on  $Exp(1)$  korral uuritud tulemusi  $k = 100$  korral. Vaadates tabelit 12, näeme, et parima tulemuse annab endiselt M4, mille puhul sihifunktsiooni väärtus on napilt väiksem kui Lloyd-Max'i algoritmi korral. See tuleneb numbrilisel integreerimisel tekkinud veast ja võib öelda, et mõlemad kvantijad annavad samahäid tulemusi. Meetodite M1, M2 ja M3 on sihifunktsiooni väärtused on küll suuremad optimaalse

tulemuse omast, aga erinevused on väiksed. Võib arvata, et  $k$  suurenedes annavad kõik kvantijad ühtlaselt häid, aga erinevaid tulemusi.

Tabel 12: Meetodite vead  $k = 100$  korral

	Täpne	M1	M2	M3	<b>M4</b>
MSE	0.00022128	0.00022901	0.00022363	0.00022285	<b>0.00022127</b>

### 3.1.3.2 $\text{Exp}(\frac{1}{4})$

Algse tihedusfunktsiooni  $f(x) = \frac{e^{-\frac{x}{4}}}{4}$  põhjal saame alternatiivsete meetodite jaoks leida uue tihedusfunktsioon, milleks on  $f^*(x) = \frac{c \cdot e^{-\frac{x}{12}}}{4^{\frac{1}{3}}}$ , kus  $c = \int_0^\infty \frac{1}{e^{-\frac{x}{12}}}$ . Leitud tihedusfunktsiooni põhjal saab öelda, et sellele vastav jaotus on  $\text{Exp}(\frac{1}{12})$ . Järgnevalt leitakse kvantijad algsele jaotusele Lloyd-Max'i iteratiivsel meetodil ja alternatiivsetel meetoditel.

Nagu ka jaotuse  $\text{Exp}(1)$  korral, on tabelist 13 näha, et jaotuse  $\text{Exp}(\frac{1}{4})$  korral on kõikide alternatiivsete meetodite tulemused jaotuse saba poole nihkes. Kõige rohkem on nihkes meetod M2, mis jaotuse saba poole annab halvimaid tulemusi. Meetodi M1 puhul on näha, et esimeste kvantimispunktide puhul on viga tunduvalt suurem kui teiste meetodite puhul. Meetodid M3 ja M4 annavad silma järgi üsnagi häid tulemusi.

Tabel 13: Tulemused  $k=8$  korral

Täpne	M1	M2	M3	M4
0.7013707	1.413396	0.783363	0.7744623	0.7744623
2.2901165	3.015773	2.503528	2.4916724	2.3895441
4.1218688	4.865581	4.512891	4.4963214	4.2563134
6.2846749	7.053440	6.929153	6.9043697	6.4679580
8.9253048	9.731163	9.961212	9.9201429	9.1814482
12.3169332	13.183347	14.038788	13.9578097	12.6934835
17.0659273	18.048929	20.317766	20.0877172	17.6796689
25.0659273	26.366695	36.953299	33.2710647	26.3666949

Parima tulemuse  $k = 8$  korral annab meetod M4 nagu selgub tabelist 14. Kvantija M4 poolt leitud tulemuse korral on sihifunktsiooni väärtus vaid 0.57% võrra suurem kui Lloyd-Max'i algoritmiga leitud tulemuse korral. Kõige halvema tulemuse on andnud meetod

M2, mille kvantimisvea kasvule aitavad tõenäoliselt oluliselt kaasa möödapanekud jaotuse saba poolsete kvantimispunktidega.

Tabel 14: Meetodite vead  $k = 8$  korral

	Täpne	M1	M2	M3	<b>M4</b>
MSE	0.4919262	0.6049579	0.560056	0.5355135	<b>0.4947774</b>

Tabeli 15 tulemustes midagi üllatavat ei leidu. Kõikide meetodite sihifunktsioonide väärtused on kahanenud tulenevalt kvantimispunktide arvu kasvust. Endiselt annab meetod M4 parima tulemuse ning meetod M2 kõige kehvema tulemuse, kuigi meetodi M1 sihifunktsiooni väärtus on võrdlemisi lähedane M2 omale.

Tabel 15: Meetodite vead  $k = 20$  korral

	Täpne	M1	M2	M3	<b>M4</b>
MSE	0.08514616	0.09330335	0.09365938	0.08818946	<b>0.08523189</b>

Leides kvantimise tulemused  $k = 100$  korral on tabelist 16 näha, et meetodi M4 tulemuse puhul on sihifunktsiooni väärtus napilt väiksem kui Lloyd-Max'i algoritmi tulemuse puhul. Selle alusel saab öelda, et need kaks kvantijat annavad sama häid tulemusi. Tähele tasub panna, et meetodite M1, M2 ja M3 tulemuste puhul on sihifunktsioonide väärtused sarnasemad kui väiksemate  $k$  väärtuste korral, aga M1 tulemus on seekord halvem M2 tulemusest.

Tabel 16: Meetodite vead  $k = 100$  korral

	Täpne	M1	M2	M3	<b>M4</b>
MSE	0.00358289	0.00363363	0.00362538	0.00360755	<b>0.00358278</b>

### 3.1.4 Hii-ruut jaotus

Uuritud on hii-ruut jaotust  $\chi^2(1)$   $k = 8$ ,  $k = 20$  ja  $k = 100$  puhul. Alternatiivsete meetodite puhul on uue tihedusfunktsiooni  $f^*(x)$  leidmine järgnev:

$$\begin{aligned} f^*(x) &= c \cdot f^{\frac{1}{3}}(x) = c \cdot \left( \frac{1}{2^{\frac{k}{2}} \cdot \Gamma(\frac{k}{2})} x^{\frac{k}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} \right)^{\frac{1}{3}} = \\ &= c \cdot \frac{1}{2^{\frac{k}{6}} \Gamma^{\frac{1}{3}}(\frac{k}{2})} x^{\frac{k}{6}-\frac{1}{3}} e^{-\frac{x}{6}} = c \cdot \frac{1}{2^{\frac{k}{6}} \Gamma^{\frac{1}{3}}(\frac{k}{2})} x^{\frac{k+4}{6}-1} e^{-\frac{x}{6}}, \end{aligned}$$

kus

$$c = \int_0^\infty \frac{2^{\frac{k}{6}} \Gamma^{\frac{1}{3}}(\frac{k}{2})}{x^{\frac{k+4}{6}-1} e^{-\frac{x}{6}}} dx$$

puhul on tegu normeerimisteguriga, mis täidab eeldust  $\int_0^\infty f^*(x) dx = 1$ .

Olles leidnud uue jaotuse tihedusfunktsiooni  $f^*(x) = c \cdot \frac{1}{2^{\frac{k}{6}} \Gamma^{\frac{1}{3}}(\frac{k}{2})} x^{\frac{k+4}{6}-1} e^{-\frac{x}{6}}$ , saame üheselt ära määrata, et uueks jaotuseks on  $\Gamma(\frac{5}{6}, 6)$ , kusjuures gamma-jaotust tähistame  $\Gamma(\alpha, \theta)$  ja selle tihedusfunktsiooniks on  $g(x) = \frac{1}{\Gamma(\frac{k}{2})\theta^k} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\theta}}$ . Järgnevalt leitakse kvantijad esmalt Lloyd-Max'i meetodil ning seejärel neljal alternatiivsel meetodil.

Tabelis 17 on välja toodud leitud tinglikud keskvaartused  $k = 8$  korral. Selgub, et kõikide alternatiivsete meetodite tulemused on võrreldes Lloyd-Max'i iteratiivse meetodi tulemustega paremale nihkes. M1 puhul on esimesed neli tinglikku keskmist optimaalsetest tulemustest kaugemal kui teiste meetodite puhul, aga samas annab M1 jaotuse saba pool paremaid tulemusi kui M2 ja M3. M2 puhul on näha, et jaotuse sabas hakkavad tulemused optimaalsetest tulemustest üsnagi kaugemale nihkuma. Alternatiivsetest kvantijatest parima tulemuse paistab andvat M4.

Tabel 17: Tulemused  $k=8$  korral

Täpne	M1	M2	M3	M4
0.1258173	0.4144097	0.1395762	0.2038669	0.2038669
0.6705442	1.0031941	0.7935386	0.8038966	0.7657054
1.3767775	1.7398278	1.5865511	1.5894602	1.4925089
2.2639902	2.6548549	2.5954835	2.5914131	2.4065059
3.3927768	3.8146684	3.9132874	3.8977524	3.5738133
4.8878862	5.3515957	5.7444059	5.7011250	5.1313049
7.0341915	7.5688798	8.6639612	8.5105087	7.3990228
10.7299484	11.4431396	20.1797995	14.7087697	11.4431396

Vaadates erinevate kvantitjate tulemuste puhul saadud sihifunktsioonide väärtusi tabelist 18, saab selgeks, et parima tulemuse andis M4 ja halvima tulemuse M1. M1 puhul aitasid ruutkeskmisele vea kasvule kaasa möödapanekud jaotuse keskväärtuse ümber. Võrreldes meetoditega M1 ja M2, andis M3 võrdlemisi hea tulemuse.

Tabel 18: Meetodite vead  $k = 8$  korral

	Täpne	M1	M2	M3	<b>M4</b>
MSE	0.05881701	0.09101519	0.07240418	0.0656745	<b>0.06097662</b>

Tabel 19 põhjal võib öelda, et meetodite headusjärjestus ei muutu. Sihifunktsioonide väärtused on vähenenud tulenevalt kvantimispunktide arvu  $k$  suurenemisest.

Tabel 19: Meetodite vead  $k = 20$  korral

	Täpne	M1	M2	M3	<b>M4</b>
MSE	0.01001498	0.01242997	0.01091473	0.01063388	<b>0.01015391</b>

Tabelist 20 on näha, et  $k = 100$  korral on endiselt meetod M4 andnud parima tulemuse, saavutades sihifunktsiooni väärtuseks 0.00041442, mis on natukene vähem Lloyd-Max'i algoritmi tulemusega saadud sihifunktsiooni väärtusest. Seega on M4 antud olukorras sama hea kvantija kui Lloyd-Max'i iteratiivne algoritm. Lloyd-Max'i algoritmi tulemusele väga lähedase tulemuse annab ka meetod M3, mille puhul sihifunktsiooni väärtus on vaid 0.32% kõrgem. Meetodite M1 ja M2 puhul on sihifunktsiooni väärtused suuremad, aga tulemused on siiski üsnagi head.

Tabel 20: Meetodite vead  $k = 100$  korral

	Täpne	M1	M2	M3	<b>M4</b>
MSE	0.00041606	0.00045941	0.00042354	0.00041738	<b>0.00041442</b>

### 3.1.5 Gamma-jaotus

Tähistame gamma-jaotuse  $\Gamma(\alpha, \theta)$  ja jaotuse tihedusfunktsiooni  $f_X(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\theta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\theta}}$ . Uuritud on kahte erinevat gamma-jaotust:  $\Gamma(4, 1)$  ja  $\Gamma(4, 4)$ . Mõlema jaotuse puhul on tehtud mõõtmisi  $k = 8$ ,  $k = 20$  ja  $k = 100$  korral. Alternatiivsete meetodite puhul on uue tihedusfunktsiooni  $f^*(x)$  leidmine järgnev:

$$\begin{aligned} f^*(x) &= c \cdot f^{\frac{1}{3}}(x) = c \cdot \left( \frac{1}{\Gamma(\alpha)\theta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\theta}} \right)^{\frac{1}{3}} = \\ &= c \cdot \frac{1}{\Gamma^{\frac{1}{3}}(\alpha)\theta^{\frac{\alpha}{3}}} x^{\frac{\alpha-1}{3}} e^{-\frac{x}{3\theta}} = \frac{c}{\Gamma^{\frac{1}{3}}(\alpha)\theta^{\frac{\alpha}{3}}} x^{\frac{\alpha+2}{3}-1} e^{-\frac{x}{3\theta}}, \end{aligned}$$

kus

$$c = \int_0^\infty \frac{\Gamma^{\frac{1}{3}}(\alpha)\theta^{\frac{\alpha}{3}}}{x^{\frac{\alpha+2}{3}-1} e^{-\frac{x}{3\theta}}} dx$$

puhul on tegu normeerimisteguriga, mis täidab eeldust  $\int_0^\infty f^*(x) dx = 1$ .

#### 3.1.5.1 $\Gamma(4, 1)$

Alge tihedusfunktsiooni  $f(x) = \frac{1}{\Gamma(4)} x^3 e^{-x}$  põhjal saame alternatiivsete meetodite jaoks leida uue tihedusfunktsiooni, milleks on  $f^*(x) = \frac{c}{\Gamma^{\frac{1}{3}}(4)} x \cdot e^{-\frac{x}{3}}$ , kus  $c = \int_0^\infty \frac{\Gamma^{\frac{1}{3}}(4)}{x \cdot e^{-\frac{x}{3}}} dx$ .

Leitud tihedusfunktsiooni põhjal saab öelda, et sellele vastav jaotus on  $\Gamma(2, 3)$ . Järgnevalt leitakse kvantijad algele jaotusele Lloyd-Max'i meetodil ja alternatiivsetel meetoditel.

Viies läbi katse  $k = 8$  korral on tabelist 21 näha, et meetodid M1 ja M4 annavad võrdlemisi häid tulemusi. Kui jaotuse saba pool on mõlema meetodi puhul kvantimispunktid nihkega suuremate väärtuste poole võrreldes optimaalsete kvantimispunktidega, siis väiksemate väärtuste juures on olukord nende kahe meetodi puhul erinev. M1 tagastab väikeste väärtuste puhul kvantimispunkte, mis on optimaalsetest väiksemad, aga meetod M4 tagastab optimaalsetest suuremaid väärtusi. Kõige ebatäpsemaid

tulemusi tundub andvat meetod M2, mille puhul esimesed kaks kvantimispunkti on optimaalsetest väiksemad ja ülejäänud kuus punkti optimaalsetest suuremad.

Tabel 21: Tulemused  $k=8$  korral

Täpne	M1	M2	M3	M4
1.432281	1.700552	0.8677251	1.210580	1.210580
2.442332	2.656548	2.3405187	2.369014	2.310746
3.375636	3.566502	3.3848679	3.394610	3.280673
4.341718	4.520369	4.4578443	4.458196	4.274122
5.414948	5.588079	5.6704211	5.660525	5.375434
6.693659	6.867844	7.1747837	7.144373	6.691184
8.372144	8.558714	9.3453360	9.240292	8.433803
11.033767	11.270399	16.8210706	13.416855	11.270399

Vaadates sihifunktsiooni väärtusi tabelist 22  $k = 8$  korral, on näha, et parima tulemuse andis kvantija M4, kuigi kvantija M1 tulemus ei ole palju halvem. Meetodi M2 puhul on sihifunktsiooni väärtus märgatavalt suurem kui teiste meetodite puhul.

Tabel 22: Meetodite vead  $k = 8$  korral

	Täpne	M1	M2	M3	<b>M4</b>
MSE	0.1324028	0.1372925	0.180608	0.1464894	<b>0.1350808</b>

Tabelis 23 on üsnagi oodatavad tulemused, mille korral meetodite headusjärjestuses muudatusi ei ole toimunud. Meetod M2 annab endiselt halvima tulemuse, aga sihifunktsiooni väärtuse erinevus teistest meetoditest ei ole enam nii suur kui  $k = 8$  puhul.

Tabel 23: Meetodite vead  $k = 20$  korral

	Täpne	M1	M2	M3	<b>M4</b>
MSE	0.02344533	0.02375171	0.02677332	0.02452305	<b>0.02370424</b>

Üllatav tulemus esineb tabelis 24, kus on näha, et meetod M1 annab parema tulemuse kui meetod M4. Seega  $k$  suurenedes läheneb meetodi M1 puhul sihifunktsiooni väärtus optimaalse tulemuse sihiväärtusele kiiremini kui see läheneb meetodi M4 korral. Meetodi M1 korral on sihifunktsiooni väärtus siiski natukene suurem optimaalse tulemuse



sihifunktsiooni väärtusest, mis tähendab, et ükski meetoditest ei anna optimaalsega võrdväärseid tulemusi. Halvim on tulemuse endiselt meetodi M2 korral.

Tabel 24: Meetodite vead  $k = 100$  korral

	Täpne	M1	M2	M3	M4
MSE	0.00099618	<b>0.00099842</b>	0.00102448	0.0010059	0.00099891

### 3.1.5.2 $\Gamma(4, 4)$

Algse tihedusfunktsiooni  $f(x) = \frac{1}{\Gamma(4) \cdot 4^4} x^3 e^{-\frac{x}{4}}$  põhjal saame alternatiivsete meetodite jaoks leida uue tihedusfunktsioon, milleks on  $f^*(x) = \frac{c}{\Gamma(\frac{1}{3})(4)^{\frac{4}{3}}} x \cdot e^{-\frac{x}{12}}$ , kus  $c = \int_0^\infty \frac{\Gamma(\frac{1}{3})(4)^{\frac{4}{3}}}{x \cdot e^{-\frac{x}{12}}}$ .

Leitud tihedusfunktsiooni põhjal saab öelda, et sellele vastav jaotus on  $\Gamma(2, 12)$ . Järgnevalt leitakse kvantijad Lloyd-Max'i meetodil ja alternatiivsetel meetoditel.

Tabelis 25 on välja toodud kvantijad  $k = 8$  korral. Kõikide alternatiivsete meetodite puhul on jaotuse saba pool paiknevad kvantimispunktid nihkega paremale võrreldes Lloyd-Max'i algoritmi abil saadud kvantijatega. Suurim paistab olevat nihe meetodi M2 korral. Samuti paistab, et meetod M2 puhul on ka esimesed kvantimispunktid kõige kaugemal Lloyd-Max'i meetodi esimestest kvantimispunktides. Meetodid M1 ja M4 paistavad alternatiivsetest meetoditest andvat kõige täpsemaid kvantijad.

Tabel 25: Tulemused  $k=8$  korral

Täpne	M1	M2	M3	M4
5.729123	6.802209	3.470900	4.842319	4.842319
9.769328	10.626191	9.362075	9.476057	9.242985
13.502543	14.266010	13.539472	13.578439	13.122691
17.366872	18.081474	17.831377	17.832786	17.096488
21.659792	22.352316	22.681684	22.642099	21.501735
26.774637	27.471377	28.699135	28.577492	26.764735
33.488578	34.234857	37.381344	36.961167	33.735211
44.135068	45.081596	67.284282	53.667420	45.081596

Selgub, et  $k = 8$  puhul annab kõige paremaa kvantija meetod M4, mille korral sihifunktsiooni väärtus erines Lloyd-Max'i meetodi sihifunktsiooni väärtusest 2.02%. Lähedaselt hea tulemuse andis meetod M1. Kõige suurem oli sihifunktsiooni väärtus meetodi

M2 korral, sest antud meetodi kvantimispunktid olid üsnagi erinevad optimaalsetest kvantimispunktidest.

Tabel 26: Meetodite vead  $k = 8$  korral

	Täpne	M1	M2	M3	<b>M4</b>
MSE	2.118446	2.19668	2.889728	2.34383	<b>2.161293</b>

Tabelis 27 ühtegi üllatavat muutust ei ole. Samas tasub tähele panna, et meetodite M1 ja M4 puhul on sihifunktsioonide väärtuste erinevus väga väike.

Tabel 27: Meetodite vead  $k = 20$  korral

	Täpne	M1	M2	M3	<b>M4</b>
MSE	0.3751271	0.380027	0.4283733	0.3923687	<b>0.3792679</b>

Vaadates katse tulemusi  $k = 100$  korral tabelist 28, on näha, et ükski alternatiivne meetod ei anna sama head tulemust kui Lloyd-Max'i algoritm. Selgub, et meetodi M1 korral on sihifunktsiooni väärtus kõige väiksem. Seega kvantimispunktide arvu  $k$  suurenedes annab M1 paremaid tulemusi kui meetod M4, mis andis väiksemate  $k$  väärtuste puhul täpsemaid tulemusi. Meetodite M2 ja M3 sihifunktsioonid on tunduvalt suuremad kui teiste kahe alternatiivse meetodi puhul, aga omavahel üsnagi võrdsed.

Tabel 28: Meetodite vead  $k = 100$  korral

	Täpne	<b>M1</b>	M2	M3	M4
MSE	0.01594048	<b>0.01597565</b>	0.01639182	0.01609459	0.01598392

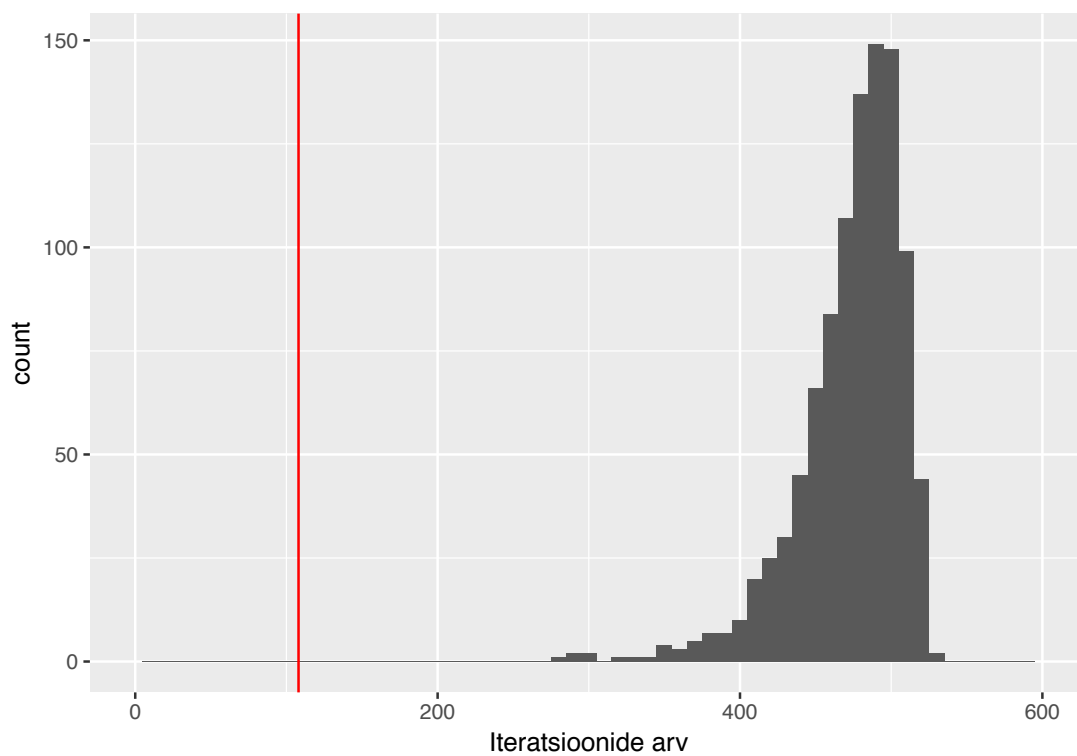
### 3.2 Alternatiivsete kvantijate kasutamine Lloyd-Max'i algoritmi alglähenditena

Alternatiivsetel meetoditel leitud tinglikke keskväärtusi on võimalik kasutada Lloyd-Max'i algoritmi alglähenditena, et kiirendada algoritmi koondumist. Kui soovime leida tõenäosusjaotusele  $f$   $k$ -keskmist Lloyd-Max'i algoritmi abil, siis tavaline valik alglähendiks on genereerida alglähend  $A^0$  kui  $k$  sõltumatut jaotusega  $f$  juhuslikku suurust. Sellise alglähendi puhul on viga  $W(A^0)$  arvatavasti oluliselt suurem kui iga

nelja alternatiivse meetodi puhul leitud alglähendi  $A^*$  viga  $W(A^*)$ . Seega võib arvata, et kui anda Lloyd-Max'i algoritmi alglähendiks mingi alternatiivsel meetodil leitud lähend, koondub algoritm palju väiksema arvu iteratsioonidega.

Olukorra lähemaks uurimiseks on vaadeldud algoritmi koondumise kiirendumist standardse normaaljaotuse ja  $k = 8$  keskväärtuse korral. Selleks on genereeritud 1000 suvalist alglähendit  $A^0 = \{a_1^0, \dots, a_k^0\}$  jaotusest  $N(0, 1)$  ning mõõdetud, mitme iteratsiooniga Lloyd-Max'i algoritm iga alglähendi korral koondub. Saadud vajaminevate iteratsioonide jaotuse keskväärtuseks on ümardatult 474 iteratsiooni ja standardhälbeks ligikaudu 35.

Et tulemusi võrrelda alternatiivsel meetodil leitud alglähendi tulemusega, on valitud alglähendiks meetodil M1 saadud lähend, mis tabeli 2 põhjal andis optimaalsele tulemusele kõige lähedasema tulemuse. Andes algoritmile ette meetodil M1 (mis olid alternatiivsetest meetoditest parim) leitud lähendid, koondus algoritm 108 iteratsiooniga. Joonisel 2 on kujutatud algoritmi koondumiseks vajaminevate iteratsioonide jaotust juhul kui alglähendid genereeriti jaotusest  $N(0, 1)$ . Vertikaalse joonega on tähistatud ära M1 lähendist lähtuvate iteratsioonide arv ehk 108. See tähendab, et alternatiivsel meetodil leitud lähendi andmine Lloyd-Max'i algoritmi alglähendiks kiirendab oluliselt algoritmi koondumist.



Joonis 2: Lloyd-Max'i algoritmi koondumiseks vajaminevate iteratsioonide arvu jaotus standardse normaaljaotuse ja  $k = 8$  keskvaartuse korral. Vertikaaliga on märgitud Lloyd-Max'i meetodi iteratsioonide arv (108), kui kasutada meetodiga M1 leitud alglaheandit

## 4 Kokkuvõte

Käesolev bakalaureusetöö uurib nelja lihtsat alternatiivset meetodit pidevatele tõenäosusjaotustele optimaalsete kvantimispunktide leidmiseks. Esmalt antakse ülevaade tõenäosusjaotuste kvantimisest, kvantimisel tekkinud vigade hindamisest, asümptootilisest kvantimisteooriast, Lloyd-Max'i algoritmist ning uuritavatest alternatiivsetest meetoditest. Kõik alternatiivsed meetodid põhinevad asümptootilises kvantimisteoorias saadud tulemusele, mis määrab ära optimaalsete kvantimispunktide paiknemise jaotuse.

Praktilises osas vaadeldakse kui häid tulemusi uuritavad meetodid annavad normaaljaotuse, ühtlase jaotuse, eksponentjaotuse, hii-ruut jaotuse ja gamma-jaotuse puhul. Et saada aimu alternatiivsete meetodid headusest, võrreldakse saadud tulemusi Lloyd-Max'i iteratiivse meetodi abil saadud tulemustega, sest on teada, et mainitud algoritm annab optimaalsed kvantimispunktid. Katsete käigus tekkivaid kvantimisvigu hinnatakse ruuthälbega, mis on ka meetodite omavahelise võrdluse aluseks.

Töö käigus selgub, et alternatiivsed meetodid annavad valdavalt häid tulemusi. Teistest paremaid tulemusi paistavad andvat meetodid M1 ja M4, mille korral on mitme jaotuse puhul ruuthälbed kõige väiksemad ja kohati sama head kui Lloyd-Max'i meetodil saadud tulemuse ruuthälbed. Samuti on tööst näha, et mida suurem on kvantimispunktide arv  $k$ , seda lähedasemad on alternatiivsete meetodite tulemused Lloyd-Max'i algoritmi tulemustele. Lisaks selgub, et asümptootilise kvantimise teooria rakendamine on odav viis saada häid alglähendeid Lloyd-Max'i algoritmi koondumise kiirendamiseks. Selle tulemusena on võimalik optimaalseid kvantimispunkte leida vähesemate arvutusressurssidega.

Antud töö tekitab küsimusi, mida oleks võimalik edaspidi uurida. Üheks peamiseks uurimisuunaks võiks olla sarnaste lihtsate alternatiivsete meetodite leidmine mitmedimensionaalsete jaotuste jaoks. Samuti võib uurida Lloyd-Max'i algoritmi koondumiskiirust ning koondumise kiirendamist sõltuvalt alglähendi valikust. Täpsemalt võib uurida ka antud töös vaadeldud alternatiivsete meetodite veahinnangute lähenemist Lloyd-Max'i algoritmi veahinnangule  $k$  suurenedes, sest osade jaotuste puhul ei jõutud vastuseni, kas mõni alternatiivne meetod või kõik alternatiivsed meetodid annavad alates mingit  $k$  väärtusest sama häid tulemusi kui Lloyd-Max'i algoritm.

Töö lõpus on lisad, kus on toodud kvantimispunktide tabelid  $k$  suurte väärtuste korral ( $k = 20$  ja  $k = 100$ ), sest nende tabelite kaasamine põhiteksti raskendaks töö lugemist.

## Kasutatud kirjandus

1. E.-M. Proakis, G. John, M. Salehi (2002). Communication Systems Engineering, 2nd edition. Upper Saddle River, New Jersey: Prentice-Hall, Inc.
2. R. Gallager. Course materials for Principles of Digital Communications I. Fall 2006. MIT OpenCourseWare (<http://ocw.mit.edu/>). Massachusetts Institute of Technology. Refereeritud 26. aprillil 2018.
3. S. Graf, H. Luschgy (2000). Foundations of Quantization for Probability Distributions. Springer.
4. G. Pagés, J. Printems, S. Corlay (2018). The Optimal Quantization Web Site. [http://quantize.maths-fi.com/gaussian\\_database](http://quantize.maths-fi.com/gaussian_database). Refereeritud 20. aprillil 2018.
5. A.A. Borovkov (2009). Probability Theory, 5th edition. Chelsea Publishing Company.
6. Robert M. Gray, David L. Neuhoff (1998). Quantization. IEEE TRANSACTIONS ON INFORMATION THEORY, VOL. 44, NO. 6, lk. 2325-2385.
7. H. Steinhaus (1956). Sur la division des corps matériels en parties. Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences, Classe III, IV väljaanne, nr. 12, lk. 801-804.
8. E.-M. Tiit, A.-M. Parring, T. Möls (1977). Tõenäosusteooria ja matemaatiline statistika. Tallinn.

# Lisad

Lisa 1.  $N(0, 1)$  tulemused  $k = 20$  korral

Tabel 29: Tulemused k=20 korral

Täpne	M1	M2	M3	M4
-2.9079606	-2.8897383	-3.5727234	-3.3947572	-3.3947572
-2.2787139	-2.2675519	-2.5067172	-2.4933417	-2.5079972
-1.8569773	-1.8490864	-1.9974163	-1.9924636	-2.0126318
-1.5234142	-1.5175239	-1.6213085	-1.6187561	-1.6429109
-1.2384671	-1.2339875	-1.3099380	-1.3084172	-1.3360855
-0.9836423	-0.9802521	-1.0363221	-1.0353509	-1.0664166
-0.7485332	-0.7460416	-0.7865724	-0.7859392	-0.8204714
-0.5264880	-0.5247775	-0.5523001	-0.5518996	-0.5901007
-0.3127913	-0.3117906	-0.3277852	-0.3275627	-0.3697587
-0.1037625	-0.1034330	-0.1086828	-0.1086113	-0.1552651
0.1037627	0.1034330	0.1086828	0.1086113	0.0568646
0.3127915	0.3117906	0.3277852	0.3275627	0.2698539
0.5264882	0.5247775	0.5523001	0.5518996	0.4870201
0.7485334	0.7460416	0.7865724	0.7859392	0.7121567
0.9836425	0.9802521	1.0363221	1.0353509	0.9500685
1.2384673	1.2339875	1.3099380	1.3084172	1.2074844
1.5234144	1.5175239	1.6213085	1.6187561	1.4948929
1.8569775	1.8490864	1.9974163	1.9924636	1.8309121
2.2787140	2.2675519	2.5067172	2.4933417	2.2554304
2.9079607	2.8897383	3.5727234	3.3947572	2.8897383

Lisa 2.  $N(0, 1)$  tulemused  $k = 100$  korral

Tabel 30: Tulemused k=100 korral

Täpne	M1	M2	M3	M4
-4.03492918	-4.03581508	-4.61628644	-4.46146723	-4.46146723
-3.56426462	-3.56431111	-3.76998069	-3.75870679	-3.76097418

-3.26535877	-3.26522240	-3.39894455	-3.39475720	-3.39769630
-3.04046055	-3.04026965	-3.14052380	-3.13832134	-3.14165620
-2.85752319	-2.85731690	-2.93788143	-2.93651497	-2.94013984
-2.70182527	-2.70161819	-2.76908589	-2.76815172	-2.77201259
-2.56532175	-2.56511988	-2.62318218	-2.62250140	-2.62656614
-2.44311250	-2.44291829	-2.49386074	-2.49334165	-2.49758929
-2.33198096	-2.33179534	-2.37713608	-2.37672672	-2.38114267
-2.22969643	-2.22951959	-2.27032095	-2.26998961	-2.27456333
-2.13464521	-2.13447698	-2.17151281	-2.17123903	-2.17596263
-2.04562020	-2.04546028	-2.07931258	-2.07908253	-2.08395001
-1.96169353	-1.96154153	-1.99265957	-1.99246357	-1.99747031
-1.88213566	-1.88199118	-1.91072933	-1.91056039	-1.91570281
-1.80636192	-1.80622457	-1.83286745	-1.83272040	-1.83799574
-1.73389599	-1.73376539	-1.75854521	-1.75841614	-1.76382228
-1.66434431	-1.66422011	-1.68732884	-1.68721473	-1.69275009
-1.59737759	-1.59725946	-1.61885766	-1.61875614	-1.62441959
-1.53271724	-1.53260488	-1.55282823	-1.55273741	-1.55852819
-1.47012527	-1.47001841	-1.48898258	-1.48890095	-1.49481862
-1.40939655	-1.40929493	-1.42709929	-1.42702563	-1.43307004
-1.35035279	-1.35025619	-1.36698676	-1.36692004	-1.37309131
-1.29283795	-1.29274615	-1.30847783	-1.30841721	-1.31471567
-1.23671449	-1.23662729	-1.25142565	-1.25137043	-1.25779665
-1.18186040	-1.18177763	-1.19570037	-1.19564996	-1.20220469
-1.12816685	-1.12808835	-1.14118648	-1.14114036	-1.14782455
-1.07553621	-1.07546182	-1.08778057	-1.08773832	-1.09455309
-1.02388040	-1.02381000	-1.03538966	-1.03535091	-1.04229755
-0.97311965	-0.97305309	-0.98392963	-0.98389406	-0.99097404
-0.92318128	-0.92311846	-0.93332405	-0.93329138	-0.94050633
-0.87399882	-0.87393964	-0.88350315	-0.88347314	-0.89082485
-0.82551121	-0.82545557	-0.83440293	-0.83437538	-0.84186579
-0.77766211	-0.77760992	-0.78596445	-0.78593917	-0.79357041
-0.73039931	-0.73035049	-0.73813317	-0.73811000	-0.74588435
-0.68367424	-0.68362871	-0.69085844	-0.69083724	-0.69875715



-0.63744152	-0.63739922	-0.64409300	-0.64407364	-0.65214174
-0.59165861	-0.59161947	-0.59779259	-0.59777496	-0.60599404
-0.54628543	-0.54624940	-0.55191556	-0.55189957	-0.56027263
-0.50128410	-0.50125113	-0.50642262	-0.50640818	-0.51493838
-0.45661867	-0.45658871	-0.46127648	-0.46126351	-0.46995424
-0.41225487	-0.41222788	-0.41644165	-0.41643010	-0.42528493
-0.36815992	-0.36813587	-0.37188422	-0.37187402	-0.38089675
-0.32430232	-0.32428117	-0.32757161	-0.32756272	-0.33675737
-0.28065169	-0.28063342	-0.28347244	-0.28346481	-0.29283564
-0.23717860	-0.23716318	-0.23955631	-0.23954992	-0.24910145
-0.19385443	-0.19384184	-0.19579369	-0.19578850	-0.20552553
-0.15065122	-0.15064145	-0.15215574	-0.15215172	-0.16207933
-0.10754155	-0.10753458	-0.10861418	-0.10861133	-0.11873488
-0.06449840	-0.06449422	-0.06514117	-0.06513947	-0.07546467
-0.02149505	-0.02149366	-0.02170917	-0.02170861	-0.03224152
0.02149505	0.02149366	0.02170917	0.02170861	0.01096156
0.06449840	0.06449422	0.06514117	0.06513947	0.05417146
0.10754155	0.10753458	0.10861418	0.10861133	0.09741511
0.15065122	0.15064145	0.15215574	0.15215172	0.14071957
0.19385443	0.19384184	0.19579369	0.19578850	0.18411219
0.23717860	0.23716318	0.23955631	0.23954992	0.22762069
0.28065169	0.28063342	0.28347244	0.28346481	0.27127332
0.32430232	0.32428117	0.32757161	0.32756272	0.31509897
0.36815992	0.36813587	0.37188422	0.37187402	0.35912732
0.41225487	0.41222788	0.41644165	0.41643010	0.40338900
0.45661867	0.45658871	0.46127648	0.46126351	0.44791572
0.50128410	0.50125113	0.50642262	0.50640818	0.49274049
0.54628543	0.54624940	0.55191556	0.55189957	0.53789778
0.59165861	0.59161947	0.59779259	0.59777496	0.58342375
0.63744152	0.63739922	0.64409300	0.64407364	0.62935646
0.68367424	0.68362871	0.69085844	0.69083724	0.67573617
0.73039931	0.73035049	0.73813317	0.73811000	0.72260561
0.77766211	0.77760992	0.78596445	0.78593917	0.77001032

0.82551121	0.82545557	0.83440293	0.83437538	0.81799905
0.87399882	0.87393964	0.88350315	0.88347314	0.86662417
0.92318128	0.92311846	0.93332405	0.93329138	0.91594218
0.97311965	0.97305309	0.98392963	0.98389406	0.96601433
1.02388040	1.02381000	1.03538966	1.03535091	1.01690724
1.07553621	1.07546182	1.08778057	1.08773832	1.06869374
1.12816685	1.12808835	1.14118648	1.14114036	1.12145381
1.18186040	1.18177763	1.19570037	1.19564996	1.17527567
1.23671449	1.23662729	1.25142565	1.25137043	1.23025716
1.29283795	1.29274615	1.30847783	1.30841721	1.28650731
1.35035279	1.35025619	1.36698676	1.36692004	1.34414832
1.40939655	1.40929493	1.42709929	1.42702563	1.40331798
1.47012527	1.47001841	1.48898258	1.48890095	1.46417258
1.53271724	1.53260488	1.55282823	1.55273741	1.52689068
1.59737759	1.59725946	1.61885766	1.61875614	1.59167774
1.66434431	1.66422011	1.68732884	1.68721473	1.65877213
1.73389599	1.73376539	1.75854521	1.75841614	1.72845286
1.80636192	1.80622457	1.83286745	1.83272040	1.80104975
1.88213566	1.88199118	1.91072933	1.91056039	1.87695701
1.96169353	1.96154153	1.99265957	1.99246357	1.95665176
2.04562020	2.04546028	2.07931258	2.07908253	2.04071969
2.13464521	2.13447698	2.17151281	2.17123903	2.12989172
2.22969643	2.22951959	2.27032095	2.26998961	2.22509753
2.33198096	2.33179534	2.37713608	2.37672672	2.32754684
2.44311250	2.44291829	2.49386074	2.49334165	2.43885716
2.56532175	2.56511988	2.62318218	2.62250140	2.56126510
2.70182527	2.70161819	2.76908589	2.76815172	2.69799692
2.85752319	2.85731690	2.93788143	2.93651497	2.85397020
3.04046055	3.04026965	3.14052380	3.13832134	3.03726491
3.26535877	3.26522240	3.39894455	3.39475720	3.26268466
3.56426462	3.56431111	3.76998069	3.75870679	3.56252706
4.03492918	4.03581508	4.61628644	4.46146723	4.03581508

Lisa 3.  $U(-1, 1)$  tulemused  $k = 20$  korral

Tabel 31: Tulemused k=20 korral

Täpne	M1	M2	M3	M4
-0.94999987	-0.90476190	-0.95	-0.95	-0.95000000
-0.84999962	-0.80952381	-0.85	-0.85	-0.85238095
-0.74999938	-0.71428571	-0.75	-0.75	-0.75476190
-0.64999915	-0.61904762	-0.65	-0.65	-0.65714286
-0.54999895	-0.52380952	-0.55	-0.55	-0.55952381
-0.44999877	-0.42857143	-0.45	-0.45	-0.46190476
-0.34999862	-0.33333333	-0.35	-0.35	-0.36428571
-0.24999850	-0.23809524	-0.25	-0.25	-0.26666667
-0.14999843	-0.14285714	-0.15	-0.15	-0.16904762
-0.04999839	-0.04761905	-0.05	-0.05	-0.07142857
0.05000161	0.04761905	0.05	0.05	0.02619048
0.15000157	0.14285714	0.15	0.15	0.12380952
0.25000150	0.23809524	0.25	0.25	0.22142857
0.35000138	0.33333333	0.35	0.35	0.31904762
0.45000123	0.42857143	0.45	0.45	0.41666667
0.55000105	0.52380952	0.55	0.55	0.51428571
0.65000085	0.61904762	0.65	0.65	0.61190476
0.75000062	0.71428571	0.75	0.75	0.70952381
0.85000038	0.80952381	0.85	0.85	0.80714286
0.95000013	0.90476190	0.95	0.95	0.90476190

Lisa 4.  $U(-1, 1)$  tulemused  $k = 100$  korral

Tabel 32: Tulemused k=100 korral

Täpne	M1	M2	M3	M4
-0.99000064	-0.98019802	-0.99	-0.99	-0.99000000
-0.97000191	-0.96039604	-0.97	-0.97	-0.97009901
-0.95000318	-0.94059406	-0.95	-0.95	-0.95019802
-0.93000445	-0.92079208	-0.93	-0.93	-0.93029703

-0.91000571	-0.90099010	-0.91	-0.91	-0.91039604
-0.89000697	-0.88118812	-0.89	-0.89	-0.89049505
-0.87000822	-0.86138614	-0.87	-0.87	-0.87059406
-0.85000946	-0.84158416	-0.85	-0.85	-0.85069307
-0.83001069	-0.82178218	-0.83	-0.83	-0.83079208
-0.81001191	-0.80198020	-0.81	-0.81	-0.81089109
-0.79001312	-0.78217822	-0.79	-0.79	-0.79099010
-0.77001432	-0.76237624	-0.77	-0.77	-0.77108911
-0.75001551	-0.74257426	-0.75	-0.75	-0.75118812
-0.73001667	-0.72277228	-0.73	-0.73	-0.73128713
-0.71001783	-0.70297030	-0.71	-0.71	-0.71138614
-0.69001896	-0.68316832	-0.69	-0.69	-0.69148515
-0.67002008	-0.66336634	-0.67	-0.67	-0.67158416
-0.65002117	-0.64356436	-0.65	-0.65	-0.65168317
-0.63002225	-0.62376238	-0.63	-0.63	-0.63178218
-0.61002330	-0.60396040	-0.61	-0.61	-0.61188119
-0.59002433	-0.58415842	-0.59	-0.59	-0.59198020
-0.57002533	-0.56435644	-0.57	-0.57	-0.57207921
-0.55002631	-0.54455446	-0.55	-0.55	-0.55217822
-0.53002727	-0.52475248	-0.53	-0.53	-0.53227723
-0.51002820	-0.50495050	-0.51	-0.51	-0.51237624
-0.49002910	-0.48514851	-0.49	-0.49	-0.49247525
-0.47002997	-0.46534653	-0.47	-0.47	-0.47257426
-0.45003081	-0.44554455	-0.45	-0.45	-0.45267327
-0.43003162	-0.42574257	-0.43	-0.43	-0.43277228
-0.41003240	-0.40594059	-0.41	-0.41	-0.41287129
-0.39003315	-0.38613861	-0.39	-0.39	-0.39297030
-0.37003387	-0.36633663	-0.37	-0.37	-0.37306931
-0.35003455	-0.34653465	-0.35	-0.35	-0.35316832
-0.33003520	-0.32673267	-0.33	-0.33	-0.33326733
-0.31003581	-0.30693069	-0.31	-0.31	-0.31336634
-0.29003639	-0.28712871	-0.29	-0.29	-0.29346535
-0.27003693	-0.26732673	-0.27	-0.27	-0.27356436

-0.25003743	-0.24752475	-0.25	-0.25	-0.25366337
-0.23003790	-0.22772277	-0.23	-0.23	-0.23376238
-0.21003833	-0.20792079	-0.21	-0.21	-0.21386139
-0.19003873	-0.18811881	-0.19	-0.19	-0.19396040
-0.17003908	-0.16831683	-0.17	-0.17	-0.17405941
-0.15003940	-0.14851485	-0.15	-0.15	-0.15415842
-0.13003968	-0.12871287	-0.13	-0.13	-0.13425743
-0.11003992	-0.10891089	-0.11	-0.11	-0.11435644
-0.09004011	-0.08910891	-0.09	-0.09	-0.09445545
-0.07004027	-0.06930693	-0.07	-0.07	-0.07455446
-0.05004039	-0.04950495	-0.05	-0.05	-0.05465347
-0.03004047	-0.02970297	-0.03	-0.03	-0.03475248
-0.01004051	-0.00990099	-0.01	-0.01	-0.01485149
0.00995949	0.00990099	0.01	0.01	0.00504950
0.02995953	0.02970297	0.03	0.03	0.02495050
0.04995961	0.04950495	0.05	0.05	0.04485149
0.06995973	0.06930693	0.07	0.07	0.06475248
0.08995989	0.08910891	0.09	0.09	0.08465347
0.10996008	0.10891089	0.11	0.11	0.10455446
0.12996032	0.12871287	0.13	0.13	0.12445545
0.14996060	0.14851485	0.15	0.15	0.14435644
0.16996092	0.16831683	0.17	0.17	0.16425743
0.18996127	0.18811881	0.19	0.19	0.18415842
0.20996167	0.20792079	0.21	0.21	0.20405941
0.22996210	0.22772277	0.23	0.23	0.22396040
0.24996257	0.24752475	0.25	0.25	0.24386139
0.26996307	0.26732673	0.27	0.27	0.26376238
0.28996361	0.28712871	0.29	0.29	0.28366337
0.30996419	0.30693069	0.31	0.31	0.30356436
0.32996480	0.32673267	0.33	0.33	0.32346535
0.34996545	0.34653465	0.35	0.35	0.34336634
0.36996613	0.36633663	0.37	0.37	0.36326733
0.38996685	0.38613861	0.39	0.39	0.38316832

0.40996760	0.40594059	0.41	0.41	0.40306931
0.42996838	0.42574257	0.43	0.43	0.42297030
0.44996919	0.44554455	0.45	0.45	0.44287129
0.46997003	0.46534653	0.47	0.47	0.46277228
0.48997090	0.48514851	0.49	0.49	0.48267327
0.50997180	0.50495050	0.51	0.51	0.50257426
0.52997273	0.52475248	0.53	0.53	0.52247525
0.54997369	0.54455446	0.55	0.55	0.54237624
0.56997467	0.56435644	0.57	0.57	0.56227723
0.58997567	0.58415842	0.59	0.59	0.58217822
0.60997670	0.60396040	0.61	0.61	0.60207921
0.62997775	0.62376238	0.63	0.63	0.62198020
0.64997883	0.64356436	0.65	0.65	0.64188119
0.66997992	0.66336634	0.67	0.67	0.66178218
0.68998104	0.68316832	0.69	0.69	0.68168317
0.70998217	0.70297030	0.71	0.71	0.70158416
0.72998333	0.72277228	0.73	0.73	0.72148515
0.74998449	0.74257426	0.75	0.75	0.74138614
0.76998568	0.76237624	0.77	0.77	0.76128713
0.78998688	0.78217822	0.79	0.79	0.78118812
0.80998809	0.80198020	0.81	0.81	0.80108911
0.82998931	0.82178218	0.83	0.83	0.82099010
0.84999054	0.84158416	0.85	0.85	0.84089109
0.86999178	0.86138614	0.87	0.87	0.86079208
0.88999303	0.88118812	0.89	0.89	0.88069307
0.90999429	0.90099010	0.91	0.91	0.90059406
0.92999555	0.92079208	0.93	0.93	0.92049505
0.94999682	0.94059406	0.95	0.95	0.94039604
0.96999809	0.96039604	0.97	0.97	0.96029703
0.98999936	0.98019802	0.99	0.99	0.98019802

Lisa 5.  $Exp(1)$  tulemused  $k = 20$  korral

Tabel 33: Tulemused k=20 korral

Täpne	M1	M2	M3	M4
0.07295187	0.1463705	0.07628222	0.07595342	0.07595342
0.22631627	0.3002504	0.23424993	0.23388462	0.23002610
0.38794567	0.4624520	0.40100244	0.40059418	0.39244200
0.55878196	0.6339273	0.57757494	0.57711568	0.56415669
0.73993780	0.8158011	0.76519720	0.76467675	0.74629997
0.93274060	1.0094167	0.96534561	0.96475087	0.94022089
1.13879167	1.2163953	1.17981392	1.17912776	1.14754853
1.36004707	1.4387192	1.41081127	1.41001089	1.37027521
1.59893094	1.6788474	1.66110143	1.66015571	1.61087329
1.85849784	1.9398815	1.93420561	1.93307105	1.87246293
2.14267233	2.2258120	2.23470762	2.23332142	2.15906021
2.45661444	2.5418936	2.56873023	2.56699833	2.47595686
2.80729979	2.8952427	2.94471295	2.94248776	2.83032516
3.20448622	3.2958369	3.37475414	3.37179029	3.23223024
3.66242430	3.7582889	3.87709506	3.87295254	3.69643104
4.20312583	4.3052536	4.48116047	4.47496463	4.24584569
4.86328331	4.9746842	5.23917509	5.22890792	4.91895507
5.71119041	5.8377304	6.25856931	6.23832463	5.78814254
6.89843892	7.0541258	7.82831374	7.77080150	7.01685821
8.89843892	9.1335673	11.98719682	11.06663836	9.13356731

Lisa 6.  $Exp(1)$  tulemused  $k = 100$  korral

Tabel 34: Tulemused k=100 korral

Täpne	M1	M2	M3	M4
0.01491567	0.02985099	0.01505025	0.01503763	0.01503763
0.04504662	0.06000200	0.04535380	0.04534091	0.04519014
0.07548328	0.09045911	0.07596657	0.07595342	0.07564879
0.10623190	0.12122862	0.10689496	0.10688153	0.10641986
0.13729894	0.15231698	0.13814552	0.13813182	0.13750983
0.16869108	0.18373088	0.16972505	0.16971105	0.16892536

0.20041518	0.21547720	0.20164055	0.20162625	0.20067336
0.23247834	0.24756307	0.23389923	0.23388462	0.23276094
0.26488789	0.27999582	0.26650857	0.26649364	0.26519543
0.29765140	0.31278303	0.29947627	0.29946101	0.29798443
0.33077668	0.34593254	0.33281029	0.33279468	0.33113576
0.36427180	0.37945244	0.36651886	0.36650290	0.36465752
0.39814513	0.41335111	0.40061050	0.40059418	0.39855809
0.43240530	0.44763719	0.43509402	0.43507732	0.43284613
0.46706125	0.48231966	0.46997853	0.46996143	0.46753059
0.50212223	0.51740778	0.50527346	0.50525595	0.50262075
0.53759781	0.55291115	0.54098859	0.54097066	0.53812622
0.57349793	0.58883973	0.57713404	0.57711568	0.57405693
0.60983287	0.62520381	0.61372032	0.61370150	0.61042321
0.64661328	0.66201409	0.65075829	0.65073900	0.64723573
0.68385023	0.69928165	0.68825927	0.68823949	0.68450559
0.72155519	0.73701799	0.72623497	0.72621468	0.72224430
0.75974008	0.77523507	0.76469756	0.76467675	0.76046380
0.79841727	0.81394528	0.80365970	0.80363834	0.79917650
0.83759963	0.85316153	0.84313452	0.84311259	0.83839530
0.87730052	0.89289721	0.88313570	0.88311318	0.87813360
0.91753385	0.93316627	0.92367748	0.92365434	0.91840535
0.95831411	0.97398323	0.96477465	0.96475087	0.95922507
0.99965635	1.01536319	1.00644266	1.00641821	1.00060787
1.04157630	1.05732192	1.04869758	1.04867243	1.04256952
1.08409031	1.09987582	1.09155618	1.09153030	1.08512643
1.12721549	1.14304204	1.13503596	1.13500932	1.12829573
1.17096964	1.18683843	1.17915520	1.17912776	1.17209531
1.21537140	1.23128369	1.22393298	1.22390471	1.21654384
1.26044021	1.27639732	1.26938927	1.26936013	1.26166085
1.30619644	1.32219974	1.31554493	1.31551489	1.30746675
1.35266137	1.36871230	1.36242184	1.36239084	1.35398289
1.39985730	1.41595737	1.41004289	1.41001089	1.40123167
1.44780760	1.46395840	1.45843208	1.45839903	1.44923651



1.49653679	1.51273996	1.50761461	1.50758046	1.49802202
1.54607058	1.56232786	1.55761693	1.55758162	1.54761401
1.59643598	1.61274922	1.60846682	1.60843030	1.59803958
1.64766141	1.66403252	1.66019352	1.66015571	1.64932724
1.69977674	1.71620775	1.71282780	1.71278864	1.70150698
1.75281344	1.76930648	1.76640208	1.76636150	1.75461039
1.80680468	1.82336199	1.82095054	1.82090845	1.80867075
1.86178545	1.87840941	1.87650927	1.87646560	1.86372319
1.91779269	1.93448581	1.93311640	1.93307105	1.91980481
1.97486546	1.99163039	1.99081227	1.99076513	1.97695481
2.03304510	2.04988465	2.04963957	2.04959055	2.03521470
2.09237540	2.10929253	2.10964357	2.10959255	2.09462843
2.15290277	2.16990066	2.17087231	2.17081916	2.15524265
2.21467653	2.23175852	2.23337683	2.23332142	2.21710685
2.27774909	2.29491875	2.29721143	2.29715362	2.28027370
2.34217624	2.35943736	2.36243396	2.36237358	2.34479922
2.40801745	2.42537408	2.42910612	2.42904299	2.41074315
2.47533618	2.49279265	2.49729381	2.49722774	2.47816926
2.54420026	2.56176120	2.56706754	2.56699833	2.54714570
2.61468233	2.63235270	2.63850286	2.63843028	2.61774546
2.68686025	2.70464535	2.71168085	2.71160464	2.69004678
2.76081764	2.77872319	2.78668866	2.78660854	2.76413372
2.83664446	2.85467661	2.86362017	2.86353583	2.84009671
2.91443768	2.93260307	2.94257665	2.94248776	2.91803325
2.99430201	3.01260781	3.02366761	3.02357378	2.99804860
3.07635076	3.09480474	3.10701166	3.10691247	3.08025673
3.16070679	3.17931737	3.19273761	3.19263259	3.16478121
3.24750362	3.26627998	3.28098563	3.28087424	3.25175637
3.33688675	3.35583887	3.37190864	3.37179029	3.34132856
3.42901502	3.44815384	3.46567391	3.46554792	3.43365767
3.52406243	3.54339994	3.56246489	3.56233051	3.52891881
3.62222005	3.64176941	3.66248342	3.66233977	3.62730433
3.72369831	3.74347406	3.76595220	3.76579830	3.72902615

3.82872981	3.84874802	3.87311785	3.87295254	3.83431849
3.93757242	3.95785095	3.98425438	3.98407636	3.94344117
4.05051318	4.07107194	4.09966746	4.09947520	4.05668342
4.16787282	4.18873408	4.21969948	4.21949121	4.17436853
4.29001127	4.31120006	4.34473567	4.34450929	4.29685939
4.41733429	4.43887890	4.47521158	4.47496463	4.42456528
4.55030164	4.57223419	4.61162221	4.61135175	4.55795007
4.68943708	4.71179424	4.75453339	4.75423590	4.69754243
4.83534084	4.85816473	4.90459596	4.90426716	4.84394847
4.98870528	5.01204461	5.06256367	5.06219836	4.99786764
5.15033473	5.17424628	5.22931618	5.22890792	5.16011295
5.32117107	5.34572152	5.40588868	5.40542942	5.33163699
5.50232695	5.52759538	5.59351094	5.59299049	5.51356574
5.69512982	5.72121095	5.79365935	5.79306461	5.70724351
5.90118095	5.92818956	6.00812766	6.00744150	5.91429322
6.12243643	6.15051348	6.23912501	6.23832463	6.13669918
6.36132038	6.39064160	6.48941517	6.48846945	6.37692302
6.62088739	6.65167573	6.76251935	6.76138479	6.63807027
6.90506201	6.93760627	7.06302136	7.06163516	6.92413656
7.21900426	7.25368782	7.39704397	7.39531207	7.24038403
7.56968979	7.60703693	7.77302669	7.77080150	7.59394055
7.96687646	8.00763110	8.20306787	8.20010403	7.99480143
8.42481484	8.47008314	8.70540880	8.70126628	8.45760911
8.96551679	9.01704781	9.30947420	9.30327837	9.00507175
9.62567490	9.68647847	10.06748882	10.05722165	9.67524951
10.47358303	10.54952468	11.08688304	11.06663836	10.53954131
11.66083359	11.76592001	12.65662747	12.59911523	11.75842937
13.66083956	13.84536155	16.81551056	15.89495210	13.84536155

Lisa 7.  $Exp(\frac{1}{4})$  tulemused  $k = 20$  korral

Tabel 35: Tulemused k=20 korral

Täpne	M1	M2	M3	M4
-------	----	----	----	----

0.2918075	0.585482	0.2037734	0.3038137	0.3038137
0.9052651	1.201002	0.9192067	0.9355385	0.9201044
1.5517828	1.849808	1.5933042	1.6023767	1.5697680
2.2351279	2.535709	2.3025474	2.3084627	2.2566268
2.9597513	3.263205	3.0546843	3.0587070	2.9851999
3.7309626	4.037667	3.8563536	3.8590035	3.7608836
4.5551668	4.865581	4.7150115	4.7165111	4.5901941
5.4401885	5.754877	5.6396316	5.6400435	5.4811008
6.3957240	6.715389	6.6413512	6.6406229	6.4434932
7.4339916	7.759526	7.7343175	7.7322842	7.4898517
8.5706896	8.903248	8.9369284	8.9332857	8.6362408
9.8264581	10.167574	10.2737558	10.2679933	9.9038274
11.2291995	11.580971	11.7786844	11.7699510	11.3213006
12.8179453	13.183347	13.5003361	13.4871612	12.9289210
14.6496976	15.033156	15.5121396	15.4918102	14.7857242
16.8125037	17.221014	17.9328659	17.8998585	16.9833828
19.4531337	19.898737	20.9743593	20.9156317	19.6758203
22.8447620	23.350922	25.0769157	24.9532985	23.1525702
27.5937561	28.216503	31.4595605	31.0832060	28.0674328
35.5937561	36.534269	56.3867877	44.2665535	36.5342693

Lisa 8.  $Exp(\frac{1}{4})$  tulemused  $k = 100$  korral

Tabel 36: Tulemused  $k=100$  korral

Täpne	M1	M2	M3	M4
0.05966248	0.1194040	0.0401475	0.0601505	0.0601505
0.18018591	0.2400080	0.1779579	0.1813636	0.1807606
0.30193213	0.3618365	0.3018207	0.3038137	0.3025952
0.42492620	0.4849145	0.4261189	0.4275261	0.4256795
0.54919397	0.6092679	0.5514427	0.5525273	0.5500393
0.67476209	0.7349235	0.6779645	0.6788442	0.6757015
0.80165807	0.8619088	0.8057672	0.8065050	0.8026935
0.92991029	0.9902523	0.9349050	0.9355385	0.9310437

1.05954806	1.1199833	1.0654212	1.0659746	1.0607817
1.19060164	1.2511321	1.1973542	1.1978440	1.1919377
1.32310230	1.3837302	1.3307406	1.3311787	1.3245430
1.45708235	1.5178098	1.4656165	1.4660116	1.4586301
1.59257521	1.6534044	1.6020181	1.6023767	1.5942324
1.72961542	1.7905488	1.7399820	1.7403093	1.7313845
1.86823874	1.9292787	1.8795458	1.8798457	1.8701224
2.00848217	2.0696311	2.0207480	2.0210238	2.0104830
2.15038403	2.2116446	2.1636283	2.1638827	2.1525049
2.29398402	2.3553589	2.3082277	2.3084627	2.2962277
2.43932326	2.5008152	2.4545885	2.4548060	2.4416928
2.58644442	2.6480564	2.6027546	2.6029560	2.5889429
2.73539171	2.7971266	2.7527713	2.7529580	2.7380224
2.88621106	2.9480720	2.9046858	2.9048587	2.8889772
3.03895012	3.1009403	3.0585469	3.0587070	3.0418552
3.19365838	3.2557811	3.2144052	3.2145533	3.1967060
3.35038730	3.4126461	3.3723137	3.3724504	3.3535812
3.50919035	3.5715888	3.5323269	3.5324527	3.5125344
3.67012316	3.7326651	3.6945018	3.6946174	3.6736214
3.83324365	3.8959329	3.8588979	3.8590035	3.8369003
3.99861211	4.0614528	4.0255769	4.0256728	4.0024315
4.16629137	4.2292877	4.1946031	4.1946897	4.1702781
4.33634692	4.3995033	4.3660437	4.3661212	4.3405057
4.50884709	4.5721682	4.5399687	4.5400373	4.5131829
4.68386318	4.7473537	4.7164513	4.7165111	4.6883812
4.86146968	4.9251348	4.8955678	4.8956189	4.8661754
5.04174441	5.1055893	5.0773982	5.0774405	5.0466434
5.22476879	5.2887990	5.2620258	5.2620596	5.2298670
5.41062798	5.4748492	5.4495383	5.4495634	5.4159316
5.59941118	5.6638295	5.6400272	5.6400435	5.6049267
5.79121187	5.8558336	5.8335886	5.8335961	5.7969460
5.98612809	6.0509598	6.0303232	6.0303218	5.9920881
6.18426271	6.2493115	6.2303369	6.2303265	6.1904560

6.38572382	6.4509969	6.4337409	6.4337212	6.3921583
6.59062501	6.6561301	6.6406520	6.6406229	6.5973090
6.79908582	6.8648310	6.8511935	6.8511546	6.8060279
7.01123211	7.0772259	7.0654949	7.0654460	7.0184416
7.22719656	7.2934480	7.2836932	7.2836338	7.2346830
7.44711911	7.5136376	7.5059325	7.5058624	7.4548928
7.67114756	7.7379432	7.7323655	7.7322842	7.6792192
7.89943816	7.9665216	7.9631535	7.9630605	7.9078192
8.13215623	8.1995386	8.1984673	8.1983622	8.1408588
8.36947689	8.4371701	8.4384881	8.4383702	8.3785137
8.61158590	8.6796026	8.6834080	8.6832767	8.6209706
8.85868046	8.9270341	8.9334312	8.9332857	8.8684274
9.11097022	9.1796750	9.1887750	9.1886145	9.1210948
9.36867834	9.4377494	9.4496707	9.4494943	9.3791969
9.63204269	9.7014963	9.7163651	9.7161720	9.6429726
9.90131713	9.9711706	9.9891220	9.9889110	9.9126770
10.17677302	10.2470448	10.2682235	10.2679933	10.1885828
10.45870085	10.5294108	10.5539716	10.5537211	10.4709818
10.74741207	10.8185814	10.8466910	10.8464185	10.7601871
11.04324116	11.1148927	11.1467301	11.1464342	11.0565349
11.34654801	11.4187065	11.4544646	11.4541433	11.3603869
11.65772046	11.7304123	11.7702997	11.7699510	11.6721330
11.97717737	12.0504313	12.0946734	12.0942951	11.9921944
12.30537194	12.3792189	12.4280603	12.4276499	12.3210269
12.64279564	12.7172695	12.7709758	12.7705303	12.6591248
12.98998259	13.0651199	13.1239807	13.1234970	13.0070255
13.34751468	13.4233555	13.4876868	13.4871612	13.3653142
13.71602739	13.7926154	13.8627633	13.8621917	13.7346307
14.09621666	14.1735997	14.2499444	14.2493220	14.1156753
14.48884673	14.5670776	14.6500376	14.6493591	14.5092173
14.89475943	14.9738962	15.0639340	15.0631932	14.9161046
15.31488504	15.3949921	15.4926205	15.4918102	15.3372740
15.75025514	15.8314038	15.9371934	15.9363054	15.7737647

16.20201784	16.2842878	16.3988761	16.3979008	16.2267337
16.67145607	16.7549363	16.8790387	16.8779648	16.6974741
17.16000951	17.2448002	17.3792230	17.3780372	17.1874376
17.66930127	17.7555156	17.9011720	17.8998585	17.6982611
18.20117035	18.2889368	18.4468670	18.4454070	18.2318003
18.75771181	18.8471770	19.0185728	19.0169436	18.7901697
19.34132656	19.4326589	19.6188947	19.6170687	19.3757939
19.95478400	20.0481785	20.2508502	20.2487935	19.9914705
20.60130149	20.6969851	20.9179611	20.9156317	20.6404518
21.28464654	21.3828861	21.6243725	21.6217177	21.3265479
22.00926979	22.1103815	22.3750093	22.3719619	22.0542630
22.78048095	22.8848438	23.1757849	23.1722584	22.8289740
23.60468516	23.7127583	24.0338853	24.0297660	23.6571729
24.48970676	24.6020539	24.9581629	24.9532985	24.5467967
25.44524227	25.5625664	25.9596958	25.9538778	25.5076921
26.48350994	26.6067029	27.0526039	27.0455391	26.5522811
27.62020803	27.7504251	28.2552774	28.2465407	27.6965462
28.87597666	29.0147513	29.5922976	29.5812483	28.9615361
30.27871828	30.4281477	31.0975786	31.0832060	30.3757622
31.86746438	32.0305244	32.8198027	32.8004161	31.9792057
33.69921719	33.8803326	34.8325181	34.8050651	33.8304365
35.86202406	36.0681912	37.2547468	37.2131135	36.0202870
38.50265511	38.7459139	40.2989363	40.2288866	38.7009980
41.89428542	42.1980987	44.4072047	44.2665535	42.1581653
46.64328332	47.0636800	50.8072197	50.3964609	47.0337175
54.64329458	55.3814462	76.4591486	63.5798084	55.3814462

Lisa 9.  $\chi^2(1)$  tulemused  $k = 20$  korral

Tabel 37: Tulemused  $k=20$  korral

Täpne	M1	M2	M3	M4
0.04380975	0.1463421	0.04550163	0.06705649	0.06705649
0.22379211	0.3421979	0.25061794	0.25489670	0.24993747

0.43977468	0.5680324	0.47756106	0.48014350	0.46870977
0.68475143	0.8204336	0.73379901	0.73555024	0.71635144
0.95714041	1.0989964	1.01854629	1.01974440	0.99142800
1.25743319	1.4047654	1.33274701	1.33350296	1.29454140
1.58739437	1.7398278	1.67860481	1.67895571	1.62755213
1.94986654	2.1072500	2.05948476	2.05942206	1.99340140
2.34882363	2.5111886	2.48003735	2.47951335	2.39617790
2.78959471	2.9571476	2.94650966	2.94543246	2.84135590
3.27927173	3.4524118	3.46728592	3.46550318	3.33622224
3.82737686	4.0067430	4.05377639	4.05104226	3.89057390
4.44695146	4.6335101	4.72190048	4.71781094	4.51785805
5.15639137	5.3515957	5.49467406	5.48853445	5.23710087
5.98271111	6.1887956	6.40703315	6.39756282	6.07635656
6.96779747	7.1883630	7.51569420	7.50028156	7.07936193
8.18166752	8.4229722	8.92211052	8.89457123	8.31978018
9.75492423	10.0292137	10.83767667	10.77936865	9.93654266
11.97801164	12.3145321	13.84916924	13.67026103	12.24420403
15.75960968	16.2630384	25.81523681	19.96675620	16.26303843

Lisa 10.  $\chi^2(1)$  tulemused  $k = 100$  korral

Tabel 38: Tulemused  $k=100$  korral

Täpne	M1	M2	M3	M4
0.00650407	0.02197606	0.00653780	0.00966972	0.00966972
0.03262233	0.05061921	0.03556937	0.03622489	0.03608100
0.06301423	0.08258176	0.06663222	0.06705649	0.06673599
0.09626590	0.11699436	0.10040118	0.10072099	0.10020365
0.13176483	0.15342246	0.13635853	0.13661714	0.13588707
0.16916784	0.19160444	0.17419167	0.17440947	0.17345299
0.20825681	0.23136675	0.21369635	0.21388468	0.21268940
0.24888249	0.27258728	0.25473081	0.25489670	0.25345103
0.29093781	0.31517681	0.29719257	0.29734068	0.29563353
0.33434364	0.35906861	0.34100550	0.34113908	0.33915970

0.37904033	0.40421199	0.38611209	0.38623351	0.38397134
0.42498249	0.45056828	0.43246853	0.43257957	0.43002415
0.47213549	0.49810806	0.48004146	0.48014350	0.47728439
0.52047316	0.54680920	0.52880572	0.52889983	0.52572654
0.56997602	0.59665552	0.57874273	0.57882977	0.57533173
0.62063016	0.64763577	0.62983932	0.62991999	0.62608650
0.67242627	0.69974285	0.68208688	0.68216175	0.67798193
0.72535897	0.75297325	0.73548070	0.73555024	0.73101301
0.77942633	0.80732662	0.79001946	0.79008406	0.78517811
0.83462944	0.86280539	0.84570483	0.84576483	0.84047857
0.89097209	0.91941452	0.90254122	0.90259689	0.89691843
0.94846054	0.97716130	0.96053547	0.96058704	0.95450418
1.00710335	1.03605519	1.01969673	1.01974440	1.01324455
1.06691118	1.09610767	1.08003628	1.08008021	1.07315043
1.12789674	1.15733215	1.14156745	1.14160776	1.13423469
1.19007468	1.21974391	1.20430550	1.20434233	1.19651214
1.25346150	1.28336008	1.26826763	1.26830105	1.25999945
1.31807556	1.34819953	1.33347287	1.33350296	1.32471514
1.38393704	1.41428293	1.39994211	1.39996893	1.39067954
1.45106791	1.48163273	1.46769810	1.46772167	1.45791477
1.51949197	1.55027315	1.53676541	1.53678577	1.52644480
1.58923486	1.62023022	1.60717050	1.60718766	1.59629540
1.66032408	1.69153184	1.67894177	1.67895571	1.66749423
1.73278904	1.76420777	1.75210953	1.75212026	1.74007087
1.80666112	1.83828975	1.82670615	1.82671363	1.81405686
1.88197375	1.91381153	1.90276609	1.90277027	1.88948577
1.95876244	1.99080896	1.98032595	1.98032679	1.96639331
2.03706492	2.06932009	2.05942462	2.05942206	2.04481737
2.11692121	2.14938525	2.14010337	2.14009733	2.12479816
2.19837375	2.23104719	2.22240593	2.22239633	2.20637830
2.28146750	2.31435118	2.30637870	2.30636543	2.28960297
2.36625011	2.39934520	2.39207080	2.39205375	2.37452002
2.45277207	2.48608003	2.47953433	2.47951335	2.46118016



2.54108684	2.57460947	2.56882445	2.56879942	2.54963710
2.63125109	2.66499052	2.65999970	2.65997044	2.63994775
2.72332490	2.75728358	2.75312208	2.75308843	2.73217246
2.81737194	2.85155269	2.84825741	2.84821916	2.82637518
2.91345979	2.94786577	2.94547553	2.94543246	2.92262379
3.01166015	3.04629492	3.04485060	3.04480248	3.02099034
3.11204922	3.14691671	3.14646145	3.14640802	3.12155134
3.21470796	3.24981253	3.25039190	3.25033287	3.22438815
3.31972251	3.35506896	3.35673120	3.35666624	3.32958730
3.42718460	3.46277819	3.46557441	3.46550318	3.43724095
3.53719198	3.57303847	3.57702294	3.57694505	3.54744734
3.64984895	3.68595463	3.69118504	3.69110007	3.66031128
3.76526694	3.80163866	3.80817644	3.80808393	3.77594472
3.88356507	3.92021032	3.92812100	3.92802043	3.89446743
4.00487095	4.04179785	4.05115146	4.05104226	4.01600764
4.12932136	4.16653876	4.17741026	4.17729180	4.14070287
4.25706322	4.29458075	4.30705052	4.30692211	4.26870081
4.38825452	4.42608266	4.44023706	4.44009793	4.40016033
4.52306545	4.56121561	4.57714762	4.57699690	4.53525257
4.66167967	4.70016429	4.71797420	4.71781094	4.67416223
4.80429573	4.84312837	4.86292460	4.86274773	4.81708904
4.95112869	4.99032416	5.01222421	5.01203252	4.96424936
5.10241200	5.14198648	5.16611793	5.16591007	5.11587805
5.25839958	5.29837080	5.32487256	5.32464702	5.27223066
5.41936831	5.45975570	5.48877940	5.48853445	5.43358586
5.58562079	5.62644573	5.65815734	5.65789103	5.60024828
5.75748867	5.79877469	5.83335640	5.83306651	5.77255185
5.93533640	5.97710949	6.01476191	6.01444590	5.95086360
6.11956569	6.16185461	6.20279940	6.20245434	6.13558818
6.31062074	6.35345742	6.39794029	6.39756282	6.32717316
6.50899440	6.55241443	6.60070881	6.60029502	6.52611526
6.71523556	6.75927867	6.81169006	6.81123540	6.73296776
6.92995783	6.97466864	7.03153982	7.03103896	6.94834947

7.15385023	7.19927895	7.26099637	7.26044302	7.17295538
7.38768990	7.43389340	7.50089487	7.50028156	7.40756969
7.63235786	7.67940076	7.75218506	7.75150286	7.65308171
7.88885824	7.93681446	8.01595317	8.01519130	7.91050548
8.15834235	8.20729690	8.29344932	8.29259469	8.18100414
8.44213882	8.49219013	8.58612223	8.58515875	8.46592067
8.74179195	8.79305479	8.89566352	8.89457123	8.76681684
9.05911093	9.11172026	9.22406520	9.22281901	9.08552341
9.39623405	9.45034997	9.57369521	9.57226320	9.42420560
9.75571355	9.81152794	9.94739829	9.94573921	9.78544966
10.14062969	10.19837521	10.34863315	10.34669281	10.17237953
10.55474712	10.61470956	10.78166292	10.77936865	10.58881680
11.00273365	11.06526940	11.25182554	11.24907777	11.03950500
11.49047408	11.55603546	11.76592857	11.76258717	11.53043185
12.02553344	12.09470641	12.33284384	12.32870532	12.06930584
12.61786378	12.69142630	12.96443747	12.95919502	12.66628531
13.28092680	13.35994293	13.67709204	13.67026103	13.33513949
14.03356505	14.11954471	14.49434143	14.48511018	14.09519069
14.90331455	14.99850293	15.45176854	15.43866975	14.97476684
15.93273803	16.04068528	16.60700748	16.58709797	16.01783795
17.19283874	17.31965376	18.06303407	18.02944975	17.29817149
18.81587979	18.97346614	20.03439448	19.96675620	18.95430640
21.09571430	21.31248926	23.11766634	22.91935725	21.29805942
24.95099260	25.32891881	35.57266708	29.30501922	25.32891881

Lisa 11.  $\Gamma(4, 1)$  tulemused  $k = 20$  korral

Tabel 39: Tulemused k=20 korral

Täpne	M1	M2	M3	M4
0.8914287	1.037152	0.5172653	0.7266278	0.7266278
1.4368312	1.549399	1.3268684	1.3454039	1.3329014
1.8896183	1.987298	1.8197093	1.8281432	1.8065336
2.3049778	2.393892	2.2589502	2.2638893	2.2336421

2.7035055	2.786598	2.6761584	2.6793505	2.6402463
3.0962307	3.175207	3.0856277	3.0877494	3.0391974
3.4905236	3.566502	3.4962196	3.4975805	3.4386843
3.8922210	3.966010	3.9146993	3.9154467	3.8449888
4.3066372	4.378873	4.3471390	4.3473296	4.2637076
4.7391918	4.810421	4.7997324	4.7993587	4.7004703
5.1959349	5.266671	5.2794590	5.2784528	5.1615115
5.6841250	5.754896	5.7948270	5.7930445	5.6542830
6.2130135	6.284419	6.3569095	6.3540928	6.1882719
6.7950596	6.867844	6.9810224	6.9767151	6.7762663
7.4480168	7.523199	7.6897511	7.6831067	7.4365309
8.1988623	8.277971	8.5190427	8.5083451	8.1969269
9.0920587	9.177656	9.5322624	9.5134937	9.1036359
10.2096652	10.306696	10.8598326	10.8210706	10.2426290
11.7325685	11.852868	12.8594577	12.7444233	11.8061491
14.2219785	14.408628	20.2315936	16.7149302	14.4086283

Lisa 12.  $\Gamma(4, 1)$  tulemused  $k = 100$  korral

Tabel 40: Tulemused  $k=100$  korral

Täpne	M1	M2	M3	M4
0.3888126	0.4433394	0.2200738	0.3104836	0.3104836
0.6002249	0.6406605	0.5443339	0.5522350	0.5512644
0.7641632	0.7982193	0.7229901	0.7266278	0.7250641
0.9052893	0.9355234	0.8713841	0.8735893	0.8715404
1.0324874	1.0601112	1.0031828	1.0047038	1.0022223
1.1501432	1.1758422	1.1241336	1.1252649	1.1223818
1.2608003	1.2850066	1.2373341	1.2382183	1.2349537
1.3660896	1.3890962	1.3446882	1.3454039	1.3417712
1.4671308	1.4891472	1.4474683	1.4480628	1.4440713
1.5647332	1.5859153	1.5465761	1.5470798	1.5427359
1.6595045	1.6799721	1.6426792	1.6431129	1.6384208
1.7519155	1.7717632	1.7362895	1.7366676	1.7316298

1.8423406	1.8616445	1.8278102	1.8281432	1.8227610
1.9310837	1.9499062	1.9175663	1.9178623	1.9121357
2.0183963	2.0367893	2.0058253	2.0060902	2.0000187
2.1044896	2.1224969	2.0928107	2.0930492	2.0866312
2.1895438	2.2072027	2.1787123	2.1789281	2.1721613
2.2737142	2.2910569	2.2636931	2.2638893	2.2567709
2.3571366	2.3741912	2.3478953	2.3480743	2.3406008
2.4399308	2.4567219	2.4314438	2.4316076	2.4237751
2.5222035	2.5387529	2.5144497	2.5146000	2.5064041
2.6040509	2.6203778	2.5970129	2.5971509	2.5885868
2.6855600	2.7016817	2.6792234	2.6793505	2.6704126
2.7668105	2.7827426	2.7611639	2.7612810	2.7519634
2.8478758	2.8636326	2.8429101	2.8430181	2.8333145
2.9288242	2.9444185	2.9245325	2.9246321	2.9145358
3.0097195	3.0251630	3.0060968	3.0061886	2.9956922
3.0906218	3.1059254	3.0876648	3.0877494	3.0768453
3.1715880	3.1867618	3.1692951	3.1693730	3.1580530
3.2526727	3.2677258	3.2510438	3.2511152	3.2393706
3.3339278	3.3488690	3.3329642	3.3330296	3.3208512
3.4154040	3.4302414	3.4151083	3.4151680	3.4025461
3.4971503	3.5118914	3.4975263	3.4975805	3.4845048
3.5792144	3.5938665	3.5802672	3.5803163	3.5667759
3.6616434	3.6762133	3.6633794	3.6634234	3.6494070
3.7444837	3.7589779	3.7469102	3.7469494	3.7324450
3.8277813	3.8422060	3.8309071	3.8309415	3.8159364
3.9115822	3.9259433	3.9154169	3.9154467	3.8999275
3.9959321	4.0102354	4.0004868	4.0005121	3.9844647
4.0808774	4.0951283	4.0861641	4.0861849	4.0695945
4.1664646	4.1806684	4.1724966	4.1725130	4.1553640
4.2527409	4.2669029	4.2595328	4.2595448	4.2418207
4.3397544	4.3538797	4.3473221	4.3473296	4.3290129
4.4275542	4.4416478	4.4359147	4.4359178	4.4169901
4.5161903	4.5302572	4.5253622	4.5253610	4.5058028

4.6057146	4.6197596	4.6157178	4.6157120	4.5955030
4.6961800	4.7102081	4.7070361	4.7070258	4.6861440
4.7876417	4.8016576	4.7993737	4.7993587	4.7777813
4.8801566	4.8941653	4.8927892	4.8927695	4.8704721
4.9737840	4.9877903	4.9873438	4.9873193	4.9642759
5.0685856	5.0825944	5.0831011	5.0830715	5.0592549
5.1646258	5.1786423	5.1801276	5.1800928	5.1554738
5.2619723	5.2760015	5.2784930	5.2784528	5.2530005
5.3606960	5.3747431	5.3782708	5.3782250	5.3519062
5.4608715	5.4749419	5.4795380	5.4794863	5.4522661
5.5625776	5.5766768	5.5823762	5.5823184	5.5541591
5.6658974	5.6800311	5.6868716	5.6868073	5.6576689
5.7709193	5.7850934	5.7931157	5.7930445	5.7628841
5.8777367	5.8919575	5.9012056	5.9011272	5.8698987
5.9864494	6.0007233	6.0112449	6.0111588	5.9788130
6.0971638	6.1114976	6.1233443	6.1232500	6.0897337
6.2099935	6.2243943	6.2376220	6.2375190	6.2027751
6.3250604	6.3395359	6.3542053	6.3540928	6.3180596
6.4424954	6.4570536	6.4732306	6.4731081	6.4357188
6.5624395	6.5770889	6.5948453	6.5947119	6.5558944
6.6850449	6.6997946	6.7192087	6.7190635	6.6787393
6.8104763	6.8253363	6.8464934	6.8463354	6.8044192
6.9389126	6.9538933	6.9768869	6.9767151	6.9331137
7.0705483	7.0856612	7.1105939	7.1104069	7.0650185
7.2055958	7.2208533	7.2478380	7.2476343	7.2003472
7.3442878	7.3597033	7.3888643	7.3886423	7.3393338
7.4868797	7.5024680	7.5339428	7.5337005	7.4822351
7.6336529	7.6494304	7.6833716	7.6831067	7.6293343
7.7849190	7.8009034	7.8374809	7.8371910	7.7809450
7.9410237	7.9572350	7.9966384	7.9963205	7.9374150
8.1023527	8.1188128	8.1612552	8.1609057	8.0991325
8.2693375	8.2860712	8.3317924	8.3314072	8.2665323
8.4424640	8.4594990	8.5087708	8.5083451	8.4401035

8.6222815	8.6396492	8.6927807	8.6923086	8.6203996
8.8094145	8.8271508	8.8844959	8.8839704	8.8080501
9.0045776	9.0227233	9.0846898	9.0841025	9.0037752
9.2085932	9.2271956	9.2942567	9.2935972	9.2084046
9.4224156	9.4415295	9.5142383	9.5134937	9.4229010
9.6471598	9.6668496	9.7458583	9.7450126	9.6483899
9.8841409	9.9044828	9.9905682	9.9896009	9.8861997
10.1349251	10.1560102	10.2501074	10.2489922	10.1379132
10.4013985	10.4233370	10.5265854	10.5252880	10.4054376
10.6858608	10.7087878	10.8225963	10.8210706	10.6911003
10.9911569	11.0152408	11.1413795	11.1395628	10.9977830
11.3208649	11.3463191	11.4870555	11.4848598	11.3291135
11.6795730	11.7066735	11.8649790	11.8622771	11.6897495
12.0733018	12.1024149	12.2822909	12.2788920	12.0858111
12.5101733	12.5417995	12.7488193	12.7444233	12.5255684
13.0015236	13.0363725	13.2786344	13.2727414	13.0205886
13.5638695	13.6029957	13.8929315	13.8846429	13.5877691
14.2226588	14.2677291	14.6259009	14.6134258	14.2532336
15.0201957	15.0740779	15.5383480	15.5175399	15.0606131
16.0349832	16.1032657	16.7562762	16.7149302	16.0914218
17.4406901	17.5367278	18.6277394	18.5086429	17.5279554
19.7775481	19.9494001	25.9150562	22.2903885	19.9494001

Lisa 13.  $\Gamma(4, 4)$  tulemused  $k = 20$  korral

Tabel 41: Tulemused  $k=20$  korral

Täpne	M1	M2	M3	M4
3.565715	4.148610	2.069061	2.906511	2.906511
5.747325	6.197595	5.307473	5.381616	5.331606
7.558473	7.949192	7.278837	7.312573	7.226135
9.219911	9.575568	9.035801	9.055557	8.934568
10.814022	11.146392	10.704634	10.717402	10.560985
12.384923	12.700828	12.342511	12.350997	12.156790

13.962095	14.266010	13.984878	13.990322	13.754737
15.568884	15.864041	15.658797	15.661787	15.379955
17.226549	17.515494	17.388556	17.389319	17.054830
18.956768	19.241685	19.198929	19.197435	18.801881
20.783740	21.066683	21.117836	21.113811	20.646046
22.736500	23.019584	23.179308	23.172178	22.617132
24.852054	25.137674	25.427638	25.416371	24.753088
27.180239	27.471377	27.924090	27.906860	27.105065
29.792067	30.092795	30.759004	30.732427	29.746124
32.795450	33.111883	34.076171	34.033380	32.787708
36.368235	36.710623	38.129050	38.053975	36.414544
40.838661	41.226782	43.439331	43.284282	40.970516
46.930274	47.411471	51.437831	50.977693	47.224596
56.887914	57.634513	80.926374	66.859721	57.634513

Lisa 14.  $\Gamma(4, 4)$  tulemused  $k = 100$  korral

Tabel 42: Tulemused  $k=100$  korral

Täpne	M1	M2	M3	M4
1.555257	1.773357	0.8802952	1.241935	1.241935
2.400910	2.562642	2.1773355	2.208940	2.205058
3.056667	3.192877	2.8919602	2.906511	2.900257
3.621174	3.742094	3.4855364	3.494357	3.486161
4.129969	4.240445	4.0127314	4.018815	4.008889
4.600594	4.703369	4.4965343	4.501060	4.489527
5.043225	5.140027	4.9493362	4.952873	4.939815
5.464384	5.556385	5.3787528	5.381616	5.367085
5.868552	5.956589	5.7898733	5.792251	5.776285
6.258963	6.343661	6.1863044	6.188319	6.170944
6.638050	6.719889	6.5707170	6.572451	6.553683
7.007696	7.087053	6.9451581	6.946670	6.926519
7.369399	7.446578	7.3112407	7.312573	7.291044
7.724373	7.799625	7.6702653	7.671449	7.648543

8.073626	8.147157	8.0233014	8.024361	8.000075
8.418001	8.489988	8.3712430	8.372197	8.346525
8.758220	8.828811	8.7148491	8.715712	8.688645
9.094903	9.164228	9.0547724	9.055557	9.027083
9.428595	9.496765	9.3915811	9.392297	9.362403
9.759773	9.826888	9.7257752	9.726430	9.695101
10.088866	10.155011	10.0577990	10.058400	10.025617
10.416258	10.481511	10.3880514	10.388604	10.354347
10.742296	10.806727	10.7168937	10.717402	10.681650
11.067300	11.130971	11.0446556	11.045124	11.007854
11.391563	11.454530	11.3716405	11.372072	11.333258
11.715358	11.777674	11.6981300	11.698528	11.658143
12.038941	12.100652	12.0243871	12.024754	11.982769
12.362552	12.423702	12.3506591	12.350997	12.307381
12.686419	12.747047	12.6771806	12.677492	12.632212
13.010759	13.070903	13.0041750	13.004461	12.957482
13.335782	13.395476	13.3318569	13.332119	13.283405
13.661688	13.720966	13.6604332	13.660672	13.610184
13.988675	14.047566	13.9901051	13.990322	13.938019
14.316933	14.375466	14.3210689	14.321265	14.267104
14.646651	14.704853	14.6535174	14.653694	14.597628
14.978014	15.035912	14.9876410	14.987798	14.929780
15.311206	15.368824	15.3236283	15.323766	15.263746
15.646411	15.703773	15.6616676	15.661787	15.599710
15.983812	16.040941	16.0019471	16.002048	15.937859
16.323595	16.380513	16.3446564	16.344740	16.278378
16.665945	16.722674	16.6899865	16.690052	16.621456
17.011052	17.067612	17.0381314	17.038179	16.967283
17.359107	17.415519	17.3892883	17.389319	17.316052
17.710308	17.766591	17.7436586	17.743671	17.667960
18.064854	18.121029	18.1014489	18.101444	18.023211
18.422952	18.479038	18.4628712	18.462848	18.382012
18.784816	18.840832	18.8281443	18.828103	18.744576



19.150664	19.206630	19.1974947	19.197435	19.111125
19.520725	19.576661	19.5711570	19.571078	19.481888
19.895236	19.951161	19.9493753	19.949277	19.857104
20.274443	20.330378	20.3324043	20.332286	20.237020
20.658605	20.714569	20.7205103	20.720371	20.621895
21.047993	21.104006	21.1139722	21.113811	21.012002
21.442889	21.498972	21.5130832	21.512900	21.407625
21.843592	21.899768	21.9181521	21.917945	21.809064
22.250417	22.306707	22.3295049	22.329274	22.216636
22.663698	22.720125	22.7474865	22.747229	22.630676
23.083786	23.140374	23.1724627	23.172178	23.051536
23.511057	23.567830	23.6048223	23.604509	23.479595
23.945909	24.002893	24.0449796	24.044635	23.915252
24.388767	24.445990	24.4933771	24.493000	24.358935
24.840087	24.897577	24.9504882	24.950076	24.811100
25.300355	25.358144	25.4168211	25.416371	25.272238
25.770096	25.828214	25.8929224	25.892432	25.742875
26.249873	26.308356	26.3793812	26.378848	26.223578
26.740296	26.799179	26.8768347	26.876254	26.714957
27.242022	27.301345	27.3859734	27.385342	27.217677
27.755768	27.815573	27.9075477	27.906860	27.732455
28.282312	28.342645	28.4423757	28.441628	28.260074
28.822502	28.883413	28.9913519	28.990537	28.801389
29.377271	29.438813	29.5554573	29.554569	29.357335
29.947639	30.009872	30.1357713	30.134802	29.928940
30.534732	30.597721	30.7334862	30.732427	30.517337
31.139797	31.203614	31.3499235	31.348764	31.123780
31.764217	31.828940	31.9865537	31.985282	31.749660
32.409533	32.475251	32.6450207	32.643623	32.396530
33.077472	33.144285	33.3271697	33.325629	33.066129
33.769979	33.837996	34.0350831	34.033380	33.760414
34.489249	34.558597	34.7711228	34.769234	34.481599
35.237781	35.308603	35.5379835	35.535882	35.232200

36.018433	36.090893	36.3387592	36.336410	36.015101
36.834496	36.908782	37.1770268	37.174389	36.833619
37.689786	37.766118	38.0569531	38.053975	37.691604
38.588762	38.667398	38.9834334	38.980051	38.593560
39.536687	39.617931	39.9622729	39.958404	39.544799
40.539824	40.624041	41.0004294	40.995969	40.551653
41.605717	41.693348	42.1063417	42.101152	41.621750
42.743566	42.835151	43.2903852	43.284282	42.764401
43.964750	44.060963	44.5655182	44.558251	43.991132
45.283582	45.385276	45.9482219	45.939439	45.316454
46.718414	46.826694	47.4599159	47.449108	46.758998
48.293329	48.409660	49.1291637	49.115568	48.343244
50.040814	50.167198	50.9952774	50.977693	50.102274
52.006215	52.145490	53.1145376	53.090965	52.082354
54.255598	54.411983	55.5717262	55.538572	54.351076
56.890754	57.070916	58.5036036	58.453703	57.012935
60.080901	60.296311	62.1533921	62.070160	60.242453
64.140050	64.413063	67.0251048	66.859721	64.365687
69.762876	70.146911	74.5109576	74.034572	70.111822
79.110305	79.797600	103.6602248	89.161554	79.797600

**Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja lõputöö üldsusele kättesaadavaks tegemiseks**

Mina, \_\_\_\_\_ Herman Adamsoo \_\_\_\_\_,

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) enda loodud teose

\_\_\_\_\_ Tõenäosusjaotuste asümptootilise kvantimisteooria kasutamine praktikas \_\_\_\_\_,

mille juhendaja on \_\_\_\_\_ Kalev Pärna \_\_\_\_\_,

1.1.reprodutseerimiseks säilitamise ja üldsusele kättesaadavaks tegemise eesmärgil, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace-is lisamise eesmärgil kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni;

1.2.üldsusele kättesaadavaks tegemiseks Tartu Ülikooli veebikeskkonna kaudu, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace'i kaudu kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni.

2. olen teadlik, et punktis 1 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.

3. kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei rikuta teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse seadusest tulenevaid õigusi.

Tallinnas, **08.05.2018**